

О. Н. Петрищев¹, д.т.н., профессор,
К. В. Базило², к.т.н., доцент

¹Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»
просп. Победы, 37, Киев, 03056, Украина

²Черкасский государственный технологический университет
б-р Шевченко, 460, Черкасы, 18006, Украина

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ИМПЕДАНСА ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ДИСКА И ЕГО РАСЧЕТ В ОБЛАСТИ НИЗКИХ ЧАСТОТ

При достаточно общих начальных предположениях получено математическое описание электрического импеданса колеблющегося в вакууме пьезокерамического тонкого диска со сплошным электродированием торцевых поверхностей. Показано, что электрический импеданс диска определяется усредненными значениями аксиального и радиального компонентов вектора смещения материальных частиц деформируемой пьезокерамики. Выполнено оценку электрического импеданса пьезокерамического диска в области низких частот, когда реализуется режим постоянства (равенства нулю) механических напряжений в объеме колеблющегося диска.

Ключевые слова: тонкий диск, пьезокерамика, электрический импеданс, радиальный и аксиальный компоненты вектора смещения материальных частиц пьезокерамики.

Введение. Конечной целью математического моделирования физического состояния колеблющихся пьезокерамических элементов является качественное и количественное описание характеристик и параметров существующих в них электрических и упругих полей. Совершенно ясно, что получение содержательных и достоверных количественных оценок параметров физического состояния пьезоэлектрических (пьезокерамических) элементов не представляется возможным без достоверных данных о величинах физико-механических констант материалов.

Академик А. А. Харкевич в заключительной статье к своей работе «Теория преобразователей» [1] пишет: «По поводу экспериментального определения некоторых физических констант... дело идет о весьма существенных вещах, и страшно видеть, что они полностью игнорируются в целом ряде экспериментальных работ. Инженер-расчетчик или проектировщик, по меньшей мере, в затруднительном положении. Он не может обратиться к инженерным справочникам типа Хютте, так как подобных для данной отрасли техники не существует. Но он не может почерпнуть нужных ему данных даже в справочниках физических констант. Достаточно заметить, что в употребительном у нас справочнике Дорфмана и Фриша отдел пьезоэлектричества вообще отсутствует, а устарелые

данные по магнитострикции приведены в совершенно неудовлетворительном виде. Таким образом, инженеру приходится обращаться к новейшим оригинальным экспериментальным работам. Но и здесь он не находит того, что нужно.

В лучшем случае, читая между строк и подвергая данные автора дополнительной обработке, можно извлечь из них нечто более или менее достоверное и полезное для практики.

Такое положение необходимо в корне изменить, путем постановки заново экспериментов, отвечающих поставленным выше требованиям. ... Можно было бы привести ряд примеров нарушения элементарного требования: так, сумбур, царящий в области определения численных значений констант хотя бы той же сегнетовой соли, следует в значительной мере отнести за счет указанных методических погрешностей...».

Приведенная выше достаточно обширная цитата заимствована из монографии, которая была опубликована в 1948 г. Прошло почти семьдесят лет, но, данная А. А. Харкевичем характеристика того состояния экспериментального обеспечения теории пьезоэлектрических функциональных элементов вообще и теории пьезоэлектрических трансформаторов в частности вполне применима и к нынешнему положению вещей. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно взглянуть

на ГОСТ 12370 – 80 (Материалы пьезокерамические. Методы испытаний) и пришедший ему на смену ОСТ 110444 – 87 (Материалы пьезокерамические. Технические условия). Справедливости ради надо сказать, что по материальным константам пьезоактивных кристаллов, которые используются в акустоэлектронике и акустооптике, есть вполне доброкачественные справочные данные [2]. Справочники такого уровня качества по пьезоэлектрическим керамикам отсутствуют.

Очевидно, что без знания материальных констант пьезокерамики нечего и думать о каком-либо осмысленном сопоставлении теоретических и экспериментальных результатов в области теории и практики пьезоэлектрических функциональных элементов. Для того чтобы быть уверенным в достоверности цифр, полученных в результате математического моделирования реальной ситуации, необходимо быть уверенным в достоверности числовых значений материальных констант, которые во многом определяют не только количественное, но в ряде случаев и качественное содержание результатов вычислений. Таким образом, вопрос об экспериментальном определении физико-механических констант пьезоэлектрических керамики не теряет своей актуальности и по сей день.

Интенсивное и широкомасштабное практическое применение синтетических пьезоэлектриков (пьезокерамик) явилось новым импульсом, стимулирующим развитие экспериментальных методов определения физико-механических параметров пьезоактивных материалов.

Авторы справочного пособия [3], перечисляя существующие методы измерения материальных констант пьезоэлектрических керамики, приводят 11 названий динамических методов экспериментального определения модулей упругости и пьезомодулей. При ближайшем рассмотрении все это многообразие методов можно разбить на три группы, а именно:

- метод резонанса-антирезонанса и его модификации;
- метод круговых диаграмм и его модификации;
- ультразвуковые методы.

Ультразвуковые методы в своей теоретической основе опираются на формализм собственных чисел и собственных векторов тензора Кристоффеля [4] и предполагают измерение скоростей распространения плоских

волн различной поляризации [5, 6]. Недостатками этого метода экспериментальных исследований являются сложность подготовки образцов и сложность возбуждения плоских волн, которые должны распространяться в строго определенных в пространстве кристаллографических осях направлениях. При этом возбуждаемые волны должны иметь наперед заданную поляризацию. Помимо этого, обработка результатов измерения скоростей распространения плоских волн невозможна без знания числовых значений компонентов тензора диэлектрической проницаемости пьезоэлектрика и компонентов тензора пьезомодулей. В различных версиях ультразвукового метода эти величины предполагаются заранее известными. Так как в ультразвуковом методе диэлектрические проницаемости и пьезомодули не измеряются по определению, то его вообще нельзя рассматривать как самостоятельный и замкнутый метод экспериментального определения материальных констант пьезоэлектриков.

Метод круговых диаграмм и некоторые его модификации достаточно подробно описаны в монографии [7]. Этот метод базируется на математической модели электрического импеданса исследуемого образца. Достоверность результатов, которые получают с помощью этого метода, определяется степенью адекватности математической модели реальному объекту. Суть метода заключается в измерении действительной и мнимой частей электрического импеданса пьезокерамического образца на 20–30 частотах. По результатам этих измерений строится круговая диаграмма комплексного сопротивления или проводимости, и по характеристическим точкам на диаграмме определяются материальные константы пьезоэлектрических материалов. Метод круговых диаграмм требует дорогостоящей аппаратуры и большого объема измерений. Основным недостатком метода круговых диаграмм заключается в том, что для определения материальных констант пьезокерамики необходимо проводить измерения на образцах различной формы и различной поляризации. При этом возникают погрешности двух типов. Первый тип погрешности – это погрешность модельного представления напряженно-деформированного состояния колеблющегося образца. Эти погрешности поддаются оценке и могут быть учтены при определении достоверных интервалов числовых значений

измеряемых материальных констант. Второй тип погрешностей (их можно назвать погрешностями технологического происхождения) обусловлен тем, что электрическая поляризация образцов различной формы может быть, в принципе, различной. Это означает, что пьезоэлектрические константы и диэлектрические проницаемости различных по форме образцов, изготовленных из одинакового исходного сырья, могут, в принципе, отличаться друг от друга. Если, к тому же, различные по форме образцы поляризованы в различных направлениях, то числовые значения пьезомодулей этих образцов будут обязательно отличаться друг от друга. Этот тип погрешностей практически не поддается оцениванию, и вопрос о достоверности измеренных числовых значений материальных констант остается без ответа.

Метод резонанса-антирезонанса, по свидетельству У. Кэди [8], восходит к работам Уоррена Мэзона (1943 г.) и предполагает измерение частот электромеханических резонансов и антирезонансов установившихся колебаний исследуемых образцов. Как и в методе круговых диаграмм, теоретической основой является математическая модель электрического импеданса исследуемого образца. По этой причине все погрешности метода круговых диаграмм присущи и методу резонанса-антирезонанса. К тому же, надо добавить, что описанные в справочном пособии [3] модели построены с применением электромеханических аналогий, т. е. электрический импеданс исследуемого образца определялся по его эквивалентной схеме. Электромеханические аналогии и следующие из них эквивалентные схемы можно использовать лишь в случае однородного напряженно-деформированного состояния исследуемого образца. Не зависящие от значений координат точки наблюдения распределения напряжений и деформаций имеют место, как правило, на частотах, существенно меньших частоты первого электромеханического резонанса. Определение числового значения константы электромеханической связи как отношения разности частот антирезонанса и резонанса к частоте резонанса заимствовано без какого либо предварительного исследования и обоснования из анализа характеристик эквивалентной схемы кварцевого резонатора [8]. На это в свое время указали авторы монографии [9]. Добротность кварцевого резонатора существенно превосходит добротность колебательного контура, в котором используется

пьезоэлектрическая керамика, поэтому отмеченное выше заимствование является, по всей видимости, неправомерным.

Наиболее существенным недостатком всех без исключения версий метода резонанса-антирезонанса является неясность в порядке определения числовых значений диэлектрической проницаемости пьезокерамики. Рассуждения [3] о том, что этот параметр определяется по результатам измерения электрической емкости образца на очень высоких частотах, не вполне правомерны.

В работе [10] впервые была предпринята попытка разработки методики экспериментального определения физико-механических параметров пьезоэлектрической керамики, которая опиралась на основные представления механики деформируемого твердого тела с усложненными (пьезоэлектрическими) свойствами. Единственным слабым местом способа, описанного в работе [10], является склейка двух пьезокерамических дисков. Эта склейка обладает плохо воспроизводимыми (особенно на длительном интервале времени) характеристиками, которые хотя и в незначительной степени, но влияют на результаты экспериментального определения модулей упругости биморфного пьезокерамического элемента. Именно по этой причине представляется необходимым так изменить трехдиапазонный метод резонанса-антирезонанса [10], чтобы исключить из результатов эксперимента трудно прогнозируемое влияние параметров склеивающего слоя.

Известно [9], что при описании различных форм колебаний одного и того же объекта используются различные наборы материальных констант. Так, при описании толщинных колебаний поляризованной по толщине пьезокерамической пластинки требуется, как минимум, знание модуля упругости c_{33}^E (модуль упругости, измеряемый в режиме постоянства (равенства нулю) напряженности электрического поля), пьезомодуля e_{33} и диэлектрической проницаемости χ_{33}^E (диэлектрическая проницаемость, измеряемая в режиме постоянства (равенства нулю) деформации или, как иногда говорят, но это правильно лишь наполовину, проницаемость зажато пьезоэлектрика). При описании радиальных колебаний поляризованного по толщине пьезокерамического диска требуется знание гораздо большего числа материальных кон-

стант, а именно c_{11}^E , c_{12}^E , c_{13}^E , c_{33}^E , e_{31} , e_{33} и χ_{33}^e . Сопоставляя между собой результаты измерения модулей упругости c_{12}^E и c_{13}^E , несложно заметить, что они отличаются друг от друга на величину, которая редко превосходит уровень 0,3–0,5 % от номинального значения (см., например, таблицы, приведенные в монографиях [3, 9, 11]). В действительности, упругие свойства поляризованной по толщине пьезокерамической пластинки в плоскости, которая перпендикулярна кристаллографической оси Z , являются трансверсально изотропными. Этот факт дает основания для вывода, что оценка числовых значений модулей упругости $c_{\alpha\beta}^E$ может и должна производиться в предположении, что $c_{12}^E = c_{13}^E$. Более того, можно доказать путем формальных рассуждений, что напряженно-деформированное состояние пластинки в режиме толщинных колебаний описывается с помощью модуля упругости c_{33}^E только лишь в том случае, когда выполняется равенство $c_{12}^E = c_{13}^E$.

Таким образом, необходимо построить непротиворечивую методику экспериментального определения материальных констант пьезокерамики, которая доставляет достоверные значения минимум трех модулей упругости, двух элементов матрицы пьезомодулей и одного элемента матрицы диэлектрических проницаемостей, что и является целью работы.

Определение электрического импеданса диска из поляризованной по толщине пьезокерамики. Рассмотрим (рис. 1) диск, толщина которого α во много раз меньше радиуса R . Поверхности диска $z = 0$ и $z = \alpha$ (z – координатная ось цилиндрической системы координат ρ, φ, z , начало которой совмещено с центром нижней поверхности диска) электродированы – покрыты тонким (не более 10 мкм) слоем серебра. На верхнюю поверхность $z = \alpha$ подается электрический потенциал $U_0 e^{i\omega t}$ (U_0 – амплитудное значение электрического потенциала, величина которого выбирается из условия $U_0/\alpha \ll 0,1E_0$, где $E_0 \cong 2$ МВ/м – напряженность поляризующего материал диска электрического поля, что гарантирует отсутствие нелинейных эффектов; $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; ω – круговая частота смены знака потенциала; t – время).

Нижняя электродированная поверхность $z = 0$ заземлена, т. е. имеет нулевой потенциал.

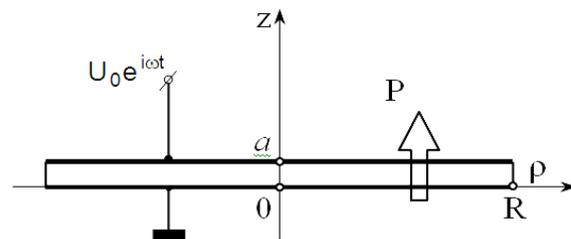


Рис. 1. Расчетная схема колеблющегося пьезокерамического диска

Приложенная к диску разность электрических потенциалов создает в его объеме электрическое поле, которое смещает ионы циркония, титана, свинца и кислорода из положения равновесия. В результате гармонически изменяющегося во времени деформирования диска в нем возникают поляризационные заряды, которые взаимодействуют на электродированных поверхностях с электрическими зарядами, которые доставляются на эти поверхности генератором разности электрических потенциалов. Результирующий электрический заряд $Qe^{i\omega t}$ на поверхности $z = \alpha$ своим электрическим полем формирует электрический ток $Ie^{i\omega t}$ в проводнике, который соединяет поверхность $z = \alpha$ с выходом электрического генератора. В любой момент времени $Ie^{i\omega t} = -\partial Q/\partial t = -i\omega Qe^{i\omega t}$, т. е. амплитуды тока и электрического заряда на поверхности $z = \alpha$ связаны линейной зависимостью $I = -i\omega Q$.

Очевидно, что электрический импеданс $Z_{эл}(\omega)$ колеблющегося диска должен подчиняться закону Ома для участка цепи, из чего следует, что

$$Z_{эл}(\omega) = \frac{U_0}{I} = -\frac{U_0}{i\omega Q}. \quad (1)$$

Амплитудное значение поверхностной плотности σ_0 электрического заряда определяется через амплитудное значение нормального этой поверхности компонента вектора электрической индукции $\vec{D}(\rho, \varphi, z)$. В рассматриваемой ситуации $\sigma_0 = D_z(\rho, z)$ и, поскольку все физические поля в колеблющемся пьезокерамическом диске а priori обладают осевой симметрией,

$$Q = \int_S \sigma_0 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho D_z(\rho, z) d\rho d\varphi = 2\pi \int_0^R \rho D_z(\rho, z) d\rho. \quad (2)$$

Электрическое состояние диска определяется законом электрической поляризации диэлектрика, который обладает пьезоэлектрическими свойствами [12] и в терминах амплитудных значений характеристик гармонически изменяющихся во времени физических полей записывается в следующем виде:

$$D_k = e_{knm} \varepsilon_{nm} + \chi_{kj}^E E_j, \quad k, n, m, j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где D_k – амплитудное значение k -го компонента вектора электрической индукции (размерность – кулон, деленный на метр квадратный); e_{knm} – компонент тензора пьезоэлектрических модулей (размерность – кулон, деленный на метр квадратный); ε_{nm} – амплитудное значение компонента тензора бесконечно малых деформаций (безразмерная величина); χ_{kj}^E – компонент тензора диэлектрической проницаемости, который экспериментально определяется в режиме постоянства (равенства нулю) упругих деформаций (верхний символ ε); E_j – амплитудное значение j -го компонента вектора напряженности электрического поля в объеме деформируемого пьезоэлектрика. При записи соотношения (3) по умолчанию предполагается, что выполняется соглашение о суммировании по дважды повторяющимся индексам. Между индексами координатных осей правосторонней декартовой системы координат и символами осей цилиндрической системы координат существует взаимно однозначное соответствие, а именно: $1 \Leftrightarrow \rho$; $2 \Leftrightarrow \varphi$ и $3 \Leftrightarrow z$.

Компоненты тензора бесконечно малых деформаций удовлетворяют обобщенному закону Гука для упругой среды с пьезоэлектрическими свойствами [12], который записывается следующим образом:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \quad (4)$$

где σ_{ij} – амплитудное значение компонента тензора механических напряжений (размерность – ньютон, деленный на метр квадратный или паскаль); c_{ijkl}^E – компонент тензора модулей упругости, который экспериментально определяется в режиме постоянства (равенства нулю) напряженности электрического поля (верхний символ E) в объеме деформируемого пьезоэлектрика.

Упругие напряжения σ_{ij} и силы инерции, которые возникают в объеме динамически деформируемого твердого тела, связаны между собой вторым законом Ньютона в дифференциальной форме или, как чаще говорят, уравнениями движения, которые в случае осесимметричного, изменяющегося во времени по гармоническому закону напряженно-деформированного состояния записываются в цилиндрической системе координат следующим образом [13]:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} (\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \rho_0 \omega^2 u_\rho = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \sigma_{z\rho}) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho_0 \omega^2 u_z = 0, \quad (6)$$

где ρ_0 – плотность пьезокерамики; u_ρ и u_z – амплитудные значения компонентов вектора смещения материальных частиц – бесконечно малых объемов пьезокерамики. Нормальные и касательные напряжения на поверхностях диска должны удовлетворять третьему закону Ньютона. Если диск колеблется в вакууме или, что, практически, то же самое, в воздухе, т. е. не имеет механических контактов с другими материальными объектами (рис. 1), то на поверхностях диска должны выполняться следующие условия:

$$\sigma_{z\rho} \Big|_{z=0, \alpha} = \sigma_{zz} \Big|_{z=0, \alpha} = 0 \quad \forall \rho \in [0, R], \quad (7)$$

$$\sigma_{\rho z} \Big|_{\rho=R} = \sigma_{\rho\rho} \Big|_{\rho=R} = 0 \quad \forall z \in [0, \alpha]. \quad (8)$$

Поскольку деформации определяются через компоненты вектора смещения (в рассматриваемой задаче это $\varepsilon_{\rho\rho} = \partial u_\rho / \partial \rho$, $\varepsilon_{\varphi\varphi} = u_\rho / \rho$, $\varepsilon_{zz} = \partial u_z / \partial z$ и $\varepsilon_{\rho z} = (\partial u_\rho / \partial z + \partial u_z / \partial \rho) / 2$), постольку можно утверждать, что адекватное реальной ситуации математическое описание электрического импеданса предполагает адекватное математическое описание динамического напряженно-деформированного состояния колеблющегося пьезокерамического диска. Естественно, что на качественные и количественные характеристики напряженно-деформированного состояния в объеме диска оказывает существенное влияние электрическое поле, которое является алгебраической суммой электрическо-

го поля, созданного генератором разности электрических потенциалов (в дальнейшем – электрическое поле внешнего источника), и электрического поля, которое возникает из-за смещения ионов из положения равновесия (прямой пьезоэлектрический эффект). Это поле в дальнейшем будем называть внутренним электрическим полем.

Вектор напряженности $\vec{E}(\rho, \varphi, z)e^{i\omega t}$ суммарного электрического поля или, как ранее говорилось, электрического поля в объеме деформируемого пьезоэлектрика удовлетворяет уравнениям Максвелла, которые в терминах амплитудных значений характеристик гармонически изменяющихся во времени физических полей записываются в виде

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} + i\omega\vec{D}, \quad (9)$$

$$\text{rot}\vec{E} = -i\omega\vec{B}, \quad (10)$$

где \vec{H} и \vec{B} – амплитудные значения векторов напряженности и индукции переменного магнитного поля, причем $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная проницаемость вакуума или магнитная постоянная); $\vec{J} = r\vec{E}$ – поверхностная плотность тока проводимости; r – удельная электрическая проводимость среды. Пьезоэлектрическая керамика является довольно хорошим изолятором электрического тока. Не впадая в излишнюю идеализацию, можно положить $r = 0$, после чего уравнение (9) принимает вид

$$\text{rot}\vec{H} = i\omega\vec{D}. \quad (11)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \left(\epsilon_{1nm} \epsilon_{nm} - \frac{\chi_{1j}^e}{h_j} \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\epsilon_{2nm} \epsilon_{nm} - \frac{\chi_{2j}^e}{h_j} \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_{3nm} \epsilon_{nm} - \frac{\chi_{3j}^e}{h_j} \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} \right) = 0, \quad (14)$$

где h_j – коэффициенты Ламе цилиндрической системы координат ($h_1 = 1$; $h_2 = \rho$; $h_3 = 1$); q_j ($q_1 = \rho$; $q_2 = \varphi$ и $q_3 = z$) – j -я координата цилиндрической системы координат. Решение этого уравнения для объекта, показанного на рис. 1, т. е. скалярный потенциал $\Phi(\rho, z)$ должен удовлетворять очевидным условиям:

$$\Phi(\rho, z)|_{z=0} = 0, \quad \Phi(\rho, z)|_{z=\alpha} = U_0. \quad (15)$$

На боковой поверхности диска $\rho = R$ должно выполняться приближенное условие [9]

Вычисляя дивергенцию от левой и правой части уравнения (11), приходим к выводу, что

$$\text{div}\vec{D} = 0. \quad (12)$$

Условие (12), определяющее аналитические свойства вектора электрической индукции, принято называть условием отсутствия свободных носителей электричества в объеме деформируемого пьезодиэлектрика.

В монографии [9] показано, что в частотном диапазоне порядка единиц мегагерц переменное магнитное поле в объеме деформируемой пьезокерамики настолько мало, что можно считать, что $\text{rot}\vec{E} \approx 0$. Из последнего равенства следует, что электрическое поле в объеме деформируемой пьезокерамики является безвихревым, т. е. потенциальным, и может быть описано с помощью скалярного электрического потенциала $\Phi(\rho, \varphi, z)e^{i\omega t}$. При этом амплитудное значение вектора напряженности электрического поля определяется через амплитудное значение скалярного потенциала стандартным образом:

$$\vec{E} = -\text{grad}\Phi. \quad (13)$$

Подставляя определение (13) в соотношения (3), а полученные результаты – в условие (12), получаем дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, которое в цилиндрической системе координат записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial \Phi(\rho, z)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} \cong 0. \quad (16)$$

Таким образом, аналитическое описание электрического импеданса $Z_{эл}(\omega)$ колеблющегося пьезокерамического диска предполагает решение граничной задачи динамической электроупругости, которая состоит из трех дифференциальных уравнений (5), (6) и (14) и граничных условий (7), (8) и (15), (16). Связующим звеном между упругой и электрической частями этой задачи являются

уравнения (3) и (4) физического состояния пьезоэлектрика.

Конкретное содержание уравнений физического состояния (3) и (4) определяется конструкцией матриц материальных констант пьезокерамики.

Для поляризованного в направлении оси z (направление поляризации показано на рис. 1 стрелкой, обозначенной символом P) пьезокерамического диска матрицы материальных констант записываются в следующем виде [14]:

- матрица модулей упругости

$$|c_{\beta\lambda}^E| = \begin{vmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22}^E & c_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44}^E & 0 & 0 \\ & & & & c_{55}^E & 0 \\ & & & & & c_{66}^E \end{vmatrix}, \quad (17)$$

где β и λ – индексы Фойгта, каждый из которых объединяет пару тензорных индексов по следующей схеме: $\beta \Leftrightarrow i, j$ и $\lambda \Leftrightarrow k, \ell$; между числовыми значениями индексов Фойгта ($\beta, \lambda = 1, 2, \dots, 6$) и тензорных индексов ($i, j, k, \ell = 1, 2, 3$) существует взаимно однозначное соответствие: $1 \Leftrightarrow (1, 1)$; $2 \Leftrightarrow (2, 2)$; $3 \Leftrightarrow (3, 3)$; $4 \Leftrightarrow (2, 3; 3, 2)$; $5 \Leftrightarrow (1, 3; 3, 1)$ и $6 \Leftrightarrow (1, 2; 2, 1)$. Между числовыми значениями элементов матрицы (17) существуют следующие соотношения: $c_{11}^E = c_{22}^E \neq c_{33}^E$; $c_{12}^E = c_{13}^E = c_{23}^E$; $c_{44}^E = c_{55}^E$; $c_{66}^E = (c_{11}^E - c_{12}^E)/2$;

- матрица пьезоэлектрических модулей $e_{kj} \Leftrightarrow e_{k\beta}$ (β – индекс Фойгта)

$$|e_{k\beta}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (18)$$

где $e_{15} = e_{24}$; $e_{31} = e_{32} \neq e_{33}$; в работе [12] показано, что пьезомодули $e_{15} = e_{24} = (e_{33} - e_{31})/2$;

- матрица диэлектрических проницаемостей χ_{kj}^E

$$|\chi_{kj}^E| = \begin{vmatrix} \chi_{11}^E & 0 & 0 \\ & \chi_{22}^E & 0 \\ & & \chi_{33}^E \end{vmatrix}, \quad (19)$$

где $\chi_{11}^E = \chi_{22}^E \neq \chi_{33}^E$.

Рассмотрим качественный состав вектора электрической индукции $\vec{D}(\rho, z)$. В общем (неосесимметричном) случае вектор электрической индукции имеет три компонента D_ρ , D_φ и D_z . В рассматриваемой задаче физическое состояние диска обладает осевой симметрией, которая обеспечивается сплошным электродированием поверхностей $z = 0$ и $z = \alpha$, по этой причине $D_\varphi \equiv 0$. Радиальный компонент вектора электрической индукции $D_\rho = 2e_{15}\varepsilon_{\rho z} + \chi_{11}^E E_\rho$. Радиальный компонент вектора напряженности электрического поля равен нулю на поверхностях $z = 0$ и $z = \alpha$, а также на оси симметрии (оси Oz) диска и на боковой поверхности $\rho = R$. На этих же поверхностях и на оси Oz обращаются в нуль касательные напряжения $\sigma_{\rho z} = 2c_{55}^E \varepsilon_{\rho z} - e_{15} E_\rho$, откуда следует, что сдвиговые деформации $\varepsilon_{\rho z} = \varepsilon_{z\rho}$ также обращаются в нуль на поверхностях $\rho = R$, $z = 0$, $z = \alpha$ и на оси Oz . Одновременное обращение в нуль сдвиговых деформаций $\varepsilon_{\rho z}$ и радиального компонента E_ρ вектора напряженности электрического поля позволяет утверждать, что радиальный компонент $D_\rho = 0$ на поверхностях $\rho = R$, $z = 0$, $z = \alpha$ и на оси Oz . Можно показать, что в объеме диска существует плоскость $z > 0$, на которой обращаются в нуль $\varepsilon_{\rho z}$ и E_ρ и, как следствие, компонент D_ρ . Если диск достаточно тонкий, то, принимая во внимание обилие областей, где $D_\rho = 0$, можно, в первом приближении, положить, что $D_\rho = 0 \forall (\rho, z) \in V$, где V – объем диска.

Таким образом, вектор электрической индукции в тонких дисках практически полностью определяется аксиальным компонентом $D_z(\rho, z)$, который, как это следует из условия (12), должен удовлетворять соотношению $\partial D_z / \partial z = 0$, что эквивалентно утверждению, что аксиальный компонент не зависит от значений координаты z , т. е. $D_z(\rho, z) \equiv D_z(\rho)$. Из определения (3) следует, что

$$D_z(\rho) = e_{31}\varepsilon_{\rho\rho} + e_{32}\varepsilon_{\varphi\varphi} + e_{33}\varepsilon_{zz} + \chi_{33}^\varepsilon E_z \equiv \\ \equiv e_{31}\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho}\right) + e_{33}\frac{\partial u_z}{\partial z} - \chi_{33}^\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial z} = e_{31}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}[\rho u_\rho(\rho, z)] + e_{33}\frac{\partial u_z}{\partial z} - \chi_{33}^\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (20)$$

При записи выражения (20) было использовано принятое в механике соглашение про обозначение одинаковыми символами численно равных материальных констант e_{31} и e_{32} .

Воспользуемся тем, что аксиальный компонент вектора электрической индукции не зависит от значений координаты z , и проинтегрируем соотношение (20) по переменной z в пределах от нуля до α :

$$\alpha D_z(\rho) = e_{31}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho \int_0^\alpha u_\rho(\rho, z) dz\right] + e_{33}[u_z(\rho, \alpha) - u_z(\rho, 0)] - \\ - \chi_{33}^\varepsilon [\Phi(\alpha) - \Phi(0)]. \quad (21)$$

Введем обозначение

$$u_\rho^{(z)}(\rho) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha u_\rho(\rho, z) dz, \quad (22)$$

и будем называть величину $u_\rho^{(z)}(\rho)$ усреднен-

ным по толщине диска радиальным компонентом вектора смещения материальных частиц диска. Так как $\Phi(\alpha) - \Phi(0) \equiv U_0$, то выражение (21) можно представить в следующем виде:

$$D_z(\rho) = e_{31}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}[\rho u_\rho^{(z)}(\rho)] + \frac{e_{33}}{\alpha}[u_z(\rho, \alpha) - u_z(\rho, 0)] - \chi_{33}^\varepsilon \frac{U_0}{\alpha}. \quad (23)$$

Предваряя подстановку выражения (23) в соотношение (2), введем обозначение

$$u_z^{(\rho)}(z) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho u_z(\rho, z) d\rho d\varphi = \frac{2}{R^2} \int_0^R \rho u_z(\rho, z) d\rho \quad (24)$$

и будем называть величину $u_z^{(\rho)}(z)$ усредненным по площади диска аксиальным компонентом вектора смещения материальных частиц диска.

Подставляя выражение (23) в определение (2) электрического заряда Q на поверхности $z = \alpha$, получаем с учетом определения (24) следующий результат:

$$Q = 2\pi e_{31} R u_\rho^{(z)}(R) + \frac{\pi R^2}{\alpha} e_{33} [u_z^{(\rho)}(\alpha) - u_z^{(\rho)}(0)] - \frac{\pi R^2}{\alpha} \chi_{33}^\varepsilon U_0. \quad (25)$$

Введем обозначение

$$C_\partial^\varepsilon = \frac{\pi R^2}{\alpha} \chi_{33}^\varepsilon, \quad (26)$$

и будем называть величину C_∂^ε динамической электрической емкостью колеблющегося пьезокерамического диска. С учетом определе-

ния (26) выражение (25) можно представить в следующем виде:

$$Q = C_\partial^\varepsilon \Xi^{(\varepsilon)}(\omega), \quad (27)$$

где

$$\Xi^{(\varepsilon)}(\omega) = \frac{2e_{31}\alpha}{\chi_{33}^\varepsilon R} u_\rho^{(z)}(R) + \frac{e_{33}}{\chi_{33}^\varepsilon} [u_z^{(\rho)}(\alpha) - u_z^{(\rho)}(0)] - U_0. \quad (28)$$

Подставляя соотношение (27) в определение (1), получаем выражение для расчета электрического импеданса колеблющегося диска

$$Z_{эл}(\omega) = \frac{U_0}{-i\omega C_\partial^\varepsilon \Xi^{(\varepsilon)}(\omega)}. \quad (29)$$

Выражение (29) справедливо в области высоких частот, когда одновременно существуют и радиальные, и аксиальные смещения

материальных частиц диска, т. е. когда длина упругой волны становится соизмеримой с толщиной диска.

Необходимо особо отметить то, что электрический импеданс диска определяется усредненными значениями компонентов вектора смещения материальных частиц. Это позволяет применить операции усреднения (22) и (24) к уравнениям (5) и (6) соответственно и тем самым преобразовать их в обыч-

новенные дифференциальные уравнения, которые, в принципе, всегда разрешимы с той или иной точностью. Тут же надо сказать, что система дифференциальных уравнений в частных производных (5) и (6) принципиально не разрешима в общем виде.

В области средних и низких частот из-за особенностей электроупругого состояния колеблющегося диска происходит изменение числовых значений динамической электрической емкости и аналитической конструкции $\Xi^{(e)}(\omega)$.

Рассмотрим последовательно электрический импеданс колеблющегося пьезокерамического диска в области низких, средних и высоких частот.

Электрический импеданс пьезокерамического диска в области низких частот. Низкими частотами будем называть тот диапазон частот, в котором длина упругой волны (масштабная единица пространственной неоднородности напряженно-деформированного состояния диска) существенно (на порядок и более) превышает радиальный размер R диска. При этом механические напряжения и упругие деформации практически не изменяются, а в пределе, при $\omega \rightarrow 0$, остаются постоянными в объеме пьезокерамического диска.

Из граничных условий (7) и (8) следует, что нормальные напряжения $\sigma_{\rho\rho}$ и, как следствие, $\sigma_{\varphi\varphi}$, а также σ_{zz} равны нулю как на поверхности, так и в любой точке объема пьезокерамического диска. То же утверждение справедливо и для касательных напряжений $\sigma_{\rho z}$, причем условие $\sigma_{\rho z} = 0 \forall (\rho, z) \in V$ при $E_\rho = 0$ эквивалентно условию $\varepsilon_{\rho z} = 0 \forall (\rho, z) \in V$. При таких предположениях из обобщенного закона Гука (4) следует система алгебраических уравнений

$$\Delta\chi_{33}^{\sigma} = \frac{2e_{31}^2 c_{33}^E - 4e_{31}e_{33}c_{12}^E + e_{33}^2(c_{11}^E + c_{12}^E)}{\chi_{33}^E [c_{33}^E(c_{11}^E + c_{12}^E) - 2(c_{12}^E)^2]} \quad (34)$$

При типичных для пьезокерамик ЦТС значениях материальных констант ($c_{11}^E = 110$ ГПа; $c_{12}^E = 60$ ГПа; $c_{33}^E = 100$ ГПа; $e_{33} = 18$ Кл/м²; $e_{31} = -8$ Кл/м² и $\chi_{33}^E = 1400\chi_0$; $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – диэлектрическая проницаемость вакуума или диэлектрическая постоянная) счет по формуле (34) дает следующий результат: $\Delta\chi_{33}^{\sigma} = 0,844$, т. е. диэлек-

$$\begin{aligned} c_{11}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{12}^E \varepsilon_{zz} &= e_{31} E_z, \\ c_{12}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{11}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{12}^E \varepsilon_{zz} &= e_{31} E_z, \\ c_{12}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{33}^E \varepsilon_{zz} &= e_{33} E_z. \end{aligned} \quad (30)$$

При записи системы уравнений (30) одинаковые по величине материальные константы обозначены одинаковыми символами.

Поскольку нормальные и касательные напряжения равны нулю, постольку уравнения (5) и (6) установившихся гармонических колебаний бесконечно малых объемов пьезокерамики выполняются с погрешностью, которая пропорциональна не учитываемой объемной плотности сил инерции.

Решение системы уравнений (30) относительно искомым деформаций сжатия-растяжения $\varepsilon_{\rho\rho}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ и ε_{zz} записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\rho\rho} = \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{e_{31}c_{33}^E - e_{33}c_{12}^E}{\left[c_{33}^E (c_{11}^E + c_{12}^E) - 2(c_{12}^E)^2 \right]} E_z, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{e_{33}(c_{11}^E + c_{12}^E) - 2e_{31}c_{12}^E}{\left[c_{33}^E (c_{11}^E + c_{12}^E) - 2(c_{12}^E)^2 \right]} E_z. \end{aligned} \quad (31)$$

Подставляя соотношения (31) в формулу (20), приходим к заключению, что

$$D_z = \chi_{33}^{\sigma} E_z = -\chi_{33}^{\sigma} \frac{U_0}{\alpha}, \quad (32)$$

где χ_{33}^{σ} – диэлектрическая проницаемость пьезокерамики в режиме постоянства (равенства нулю) механических напряжений в объеме и на поверхности колеблющегося диска. Эта диэлектрическая проницаемость рассчитывается по формуле

$$\chi_{33}^{\sigma} = \chi_{33}^E (1 + \Delta\chi_{33}^{\sigma}), \quad (33)$$

где

трическая проницаемость в области низких частот чуть ли не вдвое больше высокочастотной диэлектрической проницаемости χ_{33}^E .

При определении D_z формулой (32) функция $\Xi^{(\sigma)}(\omega) = -U_0$, а динамическая, правильнее сказать – квазистатическая электрическая емкость пьезокерамического диска $C_{\theta}^{\sigma} = \pi R^2 \chi_{33}^{\sigma} / \alpha$. При этом выражение (29)

принимает вид общеизвестной формулы для расчета реактивного сопротивления электрической емкости

$$Z_{\text{эл}}(\omega) = \frac{1}{i\omega C_{\sigma}^{\sigma}}.$$

Итак, в области низких частот, когда механические напряжения в пьезокерамическом диске практически равны нулю, а прямой пьезоэлектрический эффект практически не проявляется, электрический импеданс колеблющегося пьезокерамического диска имеет характер реактивного сопротивления конденсатора с электрической емкостью C_{σ}^{σ} .

Выводы. Основные результаты настоящей статьи можно зафиксировать следующим образом:

1. Впервые при достаточно общих начальных предположениях получено выражение для расчета электрического импеданса колеблющегося пьезокерамического диска, которое учитывает радиальный и аксиальный компоненты вектора смещения материальных частиц деформируемой пьезокерамики.

2. Показано, что электрический импеданс определяется усредненными значениями компонентов вектора смещения материальных частиц пьезокерамики. Усредняющее (интегрирующее) действие выполняют электроды, которые полностью покрывают торцевые поверхности диска.

3. Сделано предположение, что с помощью операций усреднения по толщине и по торцевой поверхности диска можно редуцировать систему дифференциальных уравнений динамической теории упругости к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, что дает возможность для выполнения численных оценок компонентов вектора смещения материальных частиц колеблющегося диска.

4. Впервые дана оценка диэлектрической проницаемости χ_{33}^{σ} в области низких частот через материальные константы, которые используются для описания высокочастотного напряженно-деформированного состояния пьезокерамики.

Список литературы

1. Харкевич А. А. Избранные труды : в 3 т. / А. А. Харкевич. – М. : Наука, 1973. – Т. 1. – 400 с.
2. Акустические кристаллы : справочник / [Блистанов А. А., Бондаренко В. С., Чкало-

ва В. В. и др.] ; под ред. М. П. Шаскольской. – М. : Наука, 1982. – 632 с.

3. Пьезокерамические преобразователи : справочник / [В. В. Ганопольский, Б. А. Касаткин, Ф. Ф. Легуша и др.]. – Л. : Судостроение, 1984. – 256 с.
4. Лямов В. Е. Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах / В. Е. Лямов. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 223 с.
5. Богданов С. В. Определение упругих и пьезокерамических постоянных ромбических кристаллов акустическим методом / С. В. Богданов // Акустический журнал. – 1997. – Т. 43, № 3. – С. 304.
6. Богданов С. В. Акустический метод определения упругих и пьезоэлектрических постоянных кристаллов 6 mm- и 4 mm-классов / С. В. Богданов // Акустический журнал. – 2000. – Т. 46, № 5. – С. 609.
7. Шульга Н. А. Колебания пьезоэлектрических тел / Н. А. Шульга, А. М. Болкисев. – К. : Наукова думка, 1990. – 228 с.
8. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практические применения / У. Кэди. – М. : ИЛ, 1949. – 718 с.
9. Гринченко В. Т. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – К. : Наукова думка, 1989. – 280 с.
10. Дидковский В. С. К вопросу об определении физико-механических констант пьезокерамических материалов / В. С. Дидковский, О. Н. Петрищев, А. Н. Шаблатович // Электроника и связь. – 2004. – № 22. – С. 76–87.
11. Партон В. З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. – М. : Наука, 1988. – 472 с.
12. Петрищев О. Н. Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Ч. 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса-антирезонанса / О. Н. Петрищев. – К. : Аверс, 2012. – 300 с.
13. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 873 с.
14. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах / В. Новацкий. – М. : Мир, 1986. – 160 с.
15. Петрищев О. Н. Принципы и методы расчета передаточных характеристик дисковых

- пьезоэлектрических трансформаторов. Ч. 1. Принципы математического моделирования трансформаторов, работающих на планарных осесимметричных колебаниях пьезокерамических дисков / О. Н. Петрищев, К. В. Базило // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2015. – № 3. – С. 10–20.
16. Петрищев О. Н. Принципы и методы расчета передаточных характеристик дисковых пьезоэлектрических трансформаторов. Ч. 2. Методика расчета параметров и характеристик простейшего дискового пьезоэлектрического трансформатора / О. Н. Петрищев, К. В. Базило // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2015. – № 4. – С. 10–23.
- ### References
1. Kharkevich, A. A. (1973) Selected works in three volumes. Vol. 1. Moscow: Nauka, 400 p. [in Russian].
 2. Blistanov, A. A., Bondarenko, V. S., Chkalova, V. V. et al. (1982) Acoustic crystals. Moscow: Nauka, 632 p. [in Russian].
 3. Ganopol'skiy, V. V., Kasatkin, B. A., Legusha, F. F. et al. (1984) Piezoceramic transducers. Leningrad: Sudostroenie, 256 p. [in Russian].
 4. Lyamov, V. E. (1983) Polarization effects and anisotropy of acoustic waves' interaction in crystals. Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta, 223 p. [in Russian].
 5. Bogdanov, S. V. (1997) Determination of elastic and piezoceramic constants of rhombic crystals by acoustic method. *Akusticheskiy zhurnal*, Vol. 43, No. 3, p. 304 [in Russian].
 6. Bogdanov, S. V. (2000) Acoustic method of elastic and piezoelectric constants definition of 6mm- and 4 mm-classes crystals. *Akusticheskiy zhurnal*, Vol. 46, No. 5, p. 609 [in Russian].
 7. Shul'ga, N. A. and Bolkisev, A. M. (1990) Fluctuations of piezoelectric solids. Kiev: Naukova dumka, 228 p. [in Russian].
 8. Cady, W. (1949) Piezoelectricity and its practical applications. Moscow: IL, 718 p. [in Russian].
 9. Grinchenko, V. T., Ulitko, A. F. and Shul'ga, N. A. (1989) Mechanics of related fields in structural elements. Vol. 5. Electroelasticity. Kiev: Naukova dumka, 280 p. [in Russian].
 10. Didkovskiy, V. S., Petrishchev, O. N., Shablantovich, A. N. (2004) On the definition of physical and mechanical constants of piezoceramic materials. *Elektronika i svyaz*, No. 22, pp. 76–87 [in Russian].
 11. Parton, V. Z. and Kudryavtsev, B. A. (1988) Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electroconductive solids. Moscow: Nauka, 472 p. [in Russian].
 12. Petrishchev, O. N. (2012). Harmonic oscillations of piezoceramic elements. Part 1. Harmonic vibrations of piezoceramic elements in vacuum and a method of resonance – antiresonance. Kiev: Avers, 300 p. [in Russian].
 13. Novatskiy, V. (1975) Theory of elasticity. Moscow: Mir, 873 p. [in Russian].
 14. Novatskiy, V. (1986) Electromagnetic effects in solids. Moscow: Mir, 160 p. [in Russian].
 15. Petrishchev, O. N. and Bazilo, C. V. (2015) Principles and methods of the calculation of transfer characteristics of disk piezoelectric transformers. Part 1. Principles of mathematical modeling of transformers that operate on planar axisymmetric vibrations of piezoceramic disks. *Visnyk Cherkaskogo derzhavnogo tehnologichnogo universitetu*, No. 3, pp. 10–20 [in Russian].
 16. Petrishchev, O. N. and Bazilo, C. V. (2015) Principles and methods of the calculation of transfer characteristics of disk piezoelectric transformers. Part 2. The procedure of calculation of parameters and characteristics of the simplest disk piezoelectric transformer. *Visnyk Cherkaskogo derzhavnogo tehnologichnogo universitetu*, No. 4, pp. 10–23 [in Russian].

O. N. Petrishchev¹, *Dr.Tech.Sc., professor,*

C. V. Bazilo², *Ph.D. (Eng.), associate professor*

¹National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute"

Peremogy ave., 37, Kyiv, 03056, Ukraine

²Cherkasy State Technological University

Shevchenko blvd, 460, Cherkasy, 18006, Ukraine

DETERMINATION OF ELECTRICAL IMPEDANCE OF PIEZOCERAMIC DISK AND ITS CALCULATION IN LOW-FREQUENCY REGION

The final goal of mathematical modeling of physical condition of vibrating piezoelectric elements is a qualitative and quantitative description of characteristics and parameters of existing electrical and elastic fields. It is clear that to obtain meaningful and reliable quantitative estimates of physical condition parameters of piezoelectric (piezoceramic) element is not possible without reliable data on the values of physical and mechanical constants of the materials.

Thus, it is necessary to build noncontradictory method of material constants experimental determination of piezoelectric ceramics, which delivers reliable values of at least three modules of elasticity, two elements of the matrix of piezoelectric coefficients and one element of the matrix of dielectric constants, which is the purpose of the work.

The main results of this paper can be written as follows:

– at sufficiently general initial assumptions a mathematical description of electrical impedance of oscillating thin piezoceramic disk with end surfaces continuous covering by electrodes in vacuum is obtained;

– it has been shown that electrical impedance of the disk is determined by average values of axial and radial components of material particles displacement vector of deformed piezoceramics;

– the evaluation of electrical impedance of piezoceramic disk at low frequencies is completed, when persistence mode (equal to zero) of mechanical stresses in an oscillating disk volume is realized.

Keywords: *thin disk, piezoelectric ceramics, electrical impedance, radial and axial components of vector of piezoceramic material particles displacement.*

Статтю представляє д.т.н., професор О. М. Петрищев, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут».