

О. Н. Петрищев<sup>1</sup>, д.т.н., профессор,  
К. В. Базило<sup>2</sup>, к.т.н., доцент

<sup>1</sup>Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»  
проспект Победы, 37, Киев, 03056, Украина

<sup>2</sup>Черкасский государственный технологический университет  
б-р Шевченко, 460, Черкассы, 18006, Украина

## ПРИНЦИПЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРАНСФОРМАТОРОВ, РАБОТАЮЩИХ НА ПЛАНАРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ДИСКОВ

*В настоящее время отсутствуют надежные и достоверные методики построения математических моделей пьезоэлектрических трансформаторов, которые могли бы использоваться в качестве теоретических основ расчета характеристик и параметров этого класса функциональных элементов современной пьезоэлектроники. В статье на простейшем примере осесимметричных радиальных колебаний пьезоэлектрического диска излагаются принципы построения математических моделей, которые в достаточной мере адекватны реальным устройствам и происходящим в них физическим процессам.*

*Рассмотрены физические процессы в пьезоэлектрических трансформаторах, которые работают с использованием осесимметричных радиальных колебаний пьезокерамического диска. Предложена схема построения математических моделей пьезоэлектрических трансформаторов этой конструкции, которые в достаточной мере адекватны реальным объектам и происходящим в них физическим процессам.*

**Ключевые слова:** пьезоэлектрический трансформатор, осесимметричные колебания, физические процессы, математическая модель.

Принцип действия пьезоэлектрических трансформаторов электрического напряжения является общеизвестным [1].

При подаче разности электрических потенциалов  $U_1 e^{i\omega t}$  ( $U_1$  - амплитудное значение разности электрических потенциалов;  $i = \sqrt{-1}$  - мнимая единица;  $\omega$  - круговая частота;  $t$  - время) на пару электродов, которые частично покрывают донную и лицевую поверхности пьезоэлектрической пластины, в объеме пластины возбуждаются гармонические колебания материальных частиц, которые в общем случае можно описать с помощью вектора смещения материальных частиц  $\vec{u}(x_k) e^{i\omega t}$  ( $x_k$  - координаты точки, в которой определяется смещение из положения равновесия материальной частицы пьезоэлектрика). Колебания материальных частиц сопровождаются динамическими деформациями  $\varepsilon_{mn}(x_k) e^{i\omega t}$  бесконечно малых элементов объема пьезоэлектрика. Вследствие прямого пьезоэлектрического эффекта в деформируемом

пьезоэлектрике возникают гармонически изменяющиеся во времени по закону  $e^{i\omega t}$  поляризационные заряды с поверхностной плотностью  $q_m(x_k) e^{i\omega t}$ . Часть этих зарядов собирается второй парой электродов, которая, как и первая пара, частично покрывает поверхности пьезоэлектрической пластины. Поляризационный заряд на второй паре электродов вызывает электрический ток  $i(t) = I e^{i\omega t}$  в проводнике, который соединяет один из электродов второй пары с нагрузочным сопротивлением  $Z_n$ . Падение напряжения  $U_2 e^{i\omega t} = Z_n I e^{i\omega t}$  является выходным сигналом пьезоэлектрического трансформатора. Очевидно, что коэффициент трансформации  $K(\omega, \Pi)$  (символ  $\Pi$  определяет совокупность геометрических и физико-механических параметров пьезоэлектрического трансформатора), равный отношению выходного сигнала ко входному воздействию, т. е.

$$K(\omega, \Pi) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_n I}{U_1},$$

определенный тем или иным математическим выражением, является, следуя определению академика А. Н. Тихонова [2], математической моделью пьезоэлектрического трансформатора.

Практическая ценность аналитической конструкции  $K(\omega, \Pi)$ , которая адекватно описывает физические процессы в реальном объекте, очевидна. С помощью персональной ЭВМ можно в течение нескольких часов рассмотреть множество комбинаций геометрических и физико-механических параметров конкретной конструкции пьезоэлектрического трансформатора и найти такое их сочетание, которое обеспечивает реализацию заданных показателей устройства. Это позволяет резко уменьшить количество натурных экспериментов, которые неизбежно выполняются в процессе разработки новых устройств. Кроме того, с помощью математической модели легко определяется чувствительность характеристик пьезоэлектрического трансформатора к вариациям параметров элементов его конструкции. Имея в своем распоряжении эти зависимости, можно осуществить рациональный выбор технологии изготовления изделия, т. е. выбрать из ряда технологий наименее затратную. Таким образом, качественная математическая модель позволяет существенно сократить время и стоимость разработки новых моделей пьезоэлектрических трансформаторов.

Именно эти, в достаточной мере очевидные, обстоятельства побуждали и побуждают специалистов заниматься разработкой различных аспектов теории пьезоэлектрических трансформаторов.

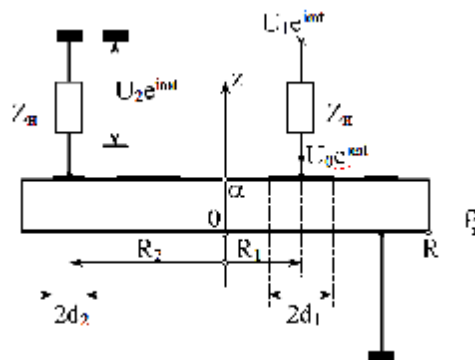
В работах отечественных и зарубежных авторов [6–11] рассматриваются методики построения моделей пьезоэлектрических трансформаторов, которые в большинстве своем основаны на использовании эквивалентных электрических схем, не позволяющих производить анализ напряженно-деформируемого состояния твердых тел с пьезоэлектрическими эффектами.

На основании изложенного выше можно утверждать, что в настоящее время отсутствуют надежные и достоверные методики построения математических моделей пьезоэлектрических трансформаторов, которые могли бы использоваться в качестве теоретических основ расчета характеристик и параметров этого класса функциональных элементов современной пьезоэлектроники.

В настоящей статье на простейшем примере осесимметричных радиальных колебаний пьезоэлектрического диска излагаются принципы построения математических моделей, которые в достаточной мере адекватны реальным устройствам и происходящим в них физическим процессам.

### **Принципы построения математических моделей дисковых пьезоэлектрических трансформаторов, работающих на радиальных осесимметричных колебаниях**

Рассмотрим диск радиуса  $R$  и толщиной  $\alpha$  (рис. 1), изготовленный из пьезокерамики типа ЦТС, поляризованной в процессе изготовления по толщине, т. е. вдоль координатной оси  $z$  цилиндрической системы координат  $(\rho, \varphi, z)$ . Направление электрической поляризации задает свойства и конструкцию матриц материальных констант пьезоэлектрического диска.



**Рис. 1. Расчетная схема дискового пьезоэлектрического трансформатора, работающего на радиальных колебаниях**

Матрица модулей упругости поляризованного по толщине пьезоэлектрического диска имеет следующий вид:

$$|c_{\lambda\beta}^E| = \begin{vmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22}^E & c_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44}^E & 0 & 0 \\ & & & & c_{55}^E & 0 \\ & & & & & c_{66}^E \end{vmatrix}, \quad (1)$$

где  $\lambda, \beta = 1; \dots; 6$  - индексы Фойгта;  $c_{11}^E = c_{22}^E \neq c_{33}^E$ ;  $c_{12}^E = c_{13}^E = c_{23}^E$ ;  $c_{44}^E = c_{55}^E$ ;  $c_{66}^E = (c_{11}^E - c_{12}^E)/2$ .

Матрица пьезомодулей  $e_{k\beta}$  ( $k = 1; 2; 3; \beta = 1; 2; \dots; 6$ ) записывается следующим образом [3]:

$$|e_{k\beta}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (2)$$

где  $e_{31} = e_{32} \neq e_{33}$ ;  $e_{15} = e_{24} = (e_{33} - e_{31})/2$ .

Матрица тензора диэлектрической проницаемости  $\chi_{mn}^{\varepsilon}$  имеет диагональную конструкцию, причем

$$|\chi_{mn}^{\varepsilon}| = \begin{vmatrix} \chi_{11}^{\varepsilon} & 0 & 0 \\ & \chi_{22}^{\varepsilon} & 0 \\ & & \chi_{33}^{\varepsilon} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где  $\chi_{11}^{\varepsilon} = \chi_{22}^{\varepsilon} \neq \chi_{33}^{\varepsilon}$ .

Донная поверхность  $z = 0$  (рис. 1) диска полностью электродирована и заземлена. На верхней (лицевой) поверхности  $z = \alpha$  концентрически расположены два кольцевых электрода. При выполнении последующих построений будем полагать, что толщина электродов, расположенных на нижней и верхней поверхностях диска, по сравнению с толщиной диска исчезающе мала. Говоря иными словами, толщину электродов, которая, как правило, не превосходит 15 мкм, не будем принимать в расчет при построении математической модели пьезоэлектрического трансформатора.

На кольцевой электрод №1 (его ширина равняется  $2d_1$  (рис. 1)) от источника электрических сигналов с выходным сопротивлением  $Z_n$  подается разность электрических потенциалов  $U_1 e^{i\omega t}$ . Очевидно, что на электроде №1 будет наблюдаться иное, отличное от входного воздействия, значение электрического потенциала  $U_0 e^{i\omega t}$ , где  $|U_0| < U_1$ . Амплитудное значение  $U_0$  разности электрических потенциалов на электроде №1 можно записать следующим образом:

$$U_0 = \frac{U_1 Z_1}{Z_n + Z_1}, \quad (4)$$

где  $Z_1$  - электрический импеданс электрода №1, т. е. входного электрода пьезоэлектрического трансформатора.

Электрический импеданс  $Z_1$  определяется из закона Ома для участка электрической цепи

$$Z_1 = U_0 / I_1, \quad (5)$$

где  $I_1$  - амплитудное значение электрического тока в проводнике, который соединяет вход-

ной электрод (электрод №1) трансформатора с источником электрических сигналов. Если на поверхности электрода №1 имеется гармонически изменяющийся во времени электрический заряд  $q(t) = Q_1 e^{i\omega t}$ , то амплитудное значение электрического тока определяется следующим образом [3]:

$$I_1 = -i\omega Q_1. \quad (6)$$

Амплитудное значение  $Q_1$  электрического заряда определяется через поверхностную плотность электрических зарядов, т. е. через аксиальный компонент  $D_z(\rho, \alpha)$  вектора электрической индукции, очевидным соотношением

$$Q_1 = 2\pi \int_{R_1-d_1}^{R_1+d_1} \rho D_z(\rho, \alpha) d\rho, \quad (7)$$

где  $2d_1$  - ширина входного кольцевого электрода.

Не подлежит сомнению тот факт, что электрическое состояние любого материального объекта определяется фундаментальными соотношениями теории электричества, т. е. уравнениями Максвелла:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (9)$$

где  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  - векторы напряженности сопряженных магнитного и электрического полей;  $\vec{B}$  и  $\vec{D}$  - векторы магнитной и электрической индукции составляющих электромагнитного поля;  $\vec{J} = \gamma \vec{E}$  - поверхностная плотность тока проводимости;  $\gamma$  - удельная электрическая проводимость материала. Так как пьезоэлектрическая керамика является достаточно хорошим изолятором, то её можно наделить свойствами идеального диэлектрика, т. е. принять, что  $\gamma \cong 0$ . В этом случае уравнение Максвелла (8) для гармонически изменяющихся во времени полей принимает следующий вид:

$$\text{rot} \vec{H} = i\omega \vec{D}, \quad (10)$$

где  $\vec{H}$  и  $\vec{D}$  имеют смысл амплитудных значений напряженности магнитного поля и индукции электрического поля. Вычисляя дивергенцию от левой и правой части соотношения (10), приходим к следующему выводу:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0. \quad (11)$$

Выражение (11) имеет смысл условия отсутствия свободных носителей электричества в объеме идеального диэлектрика.

В монографии [4] показано, что в частотном диапазоне вплоть до 10 МГц магнитная составляющая электромагнитного поля в деформируемой пьезокерамике на несколько порядков меньше электрической составляющей. Это дает основание для следующей записи уравнения (9):

$$\operatorname{rot} \vec{E} \cong 0. \quad (12)$$

Соотношение (12) позволяет говорить о том, что электрическое поле в объеме деформируемой пьезокерамики носит безвихревой, т. е. потенциальный характер и может быть описано с помощью скалярного электрического потенциала  $\Phi$ , причем

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi. \quad (13)$$

С учетом определения (13), известное [3, 4] выражение для расчета  $m$ -го компонента вектора электрической индукции в объеме деформируемого пьезоэлектрика можно записать в следующем виде:

$$D_m = e_{mkj} \varepsilon_{kj} - \chi_{mn}^{\varepsilon} (\operatorname{grad} \Phi)_n, \quad (14)$$

где  $e_{mkj} \Leftrightarrow e_{m\beta j}$  ( $\beta$  - индекс Фойгта, которым заменяется пара симметричных относительно перестановки тензорных индексов  $k, j$ ) - элемент матрицы пьезоэлектрических констант;  $\varepsilon_{kj}$  - компонент тензора бесконечно малых деформаций;  $\chi_{mn}^{\varepsilon}$  - компонент тензора диэлектрической проницаемости;  $(\operatorname{grad} \Phi)_n$  -  $n$ -й компонент вектора градиента скалярного потенциала. При записи уравнения (14) в цилиндрической системе координат необходимо учитывать следующее соответствие между символами  $(\rho, \varphi, z)$  координатных осей цилиндрической системы координат и номерами  $k = 1, 2, 3$  координатных осей  $x_k$  декартовой системы координат:  $1 \Leftrightarrow \rho$ ;  $2 \Leftrightarrow \varphi$ ;  $3 \Leftrightarrow z$ .

Применительно к рассматриваемой ситуации из общего выражения (14) следует, что

$$D_{\rho} = 2e_{15} \varepsilon_{\rho z} - \chi_{11}^{\varepsilon} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \rho}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} D_z &= e_{31} \varepsilon_{\rho\rho} + e_{32} \varepsilon_{\varphi\varphi} + e_{33} \varepsilon_{zz} - \chi_{33}^{\varepsilon} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} = \\ &= e_{31} (\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) + e_{33} \varepsilon_{zz} - \chi_{33}^{\varepsilon} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z}, \quad (16) \end{aligned}$$

где  $D_{\varphi} \equiv 0$  из-за осевой симметрии рассматриваемой задачи;  $\varepsilon_{\rho z} = (\partial u_{\rho} / \partial z + \partial u_z / \partial \rho) / 2$  - сдвиговая деформация;  $u_{\rho}$  и  $u_z$  - амплитудные значения радиального и аксиального компонентов вектора смещения материальных частиц динамически деформируемого пьезоэлектрического диска. При записи соотношения (16) одинаковые по величине пьезомодули  $e_{31}$  и  $e_{32}$  (см. комментарий к матрице (2)) обозначены, как это принято в механике деформируемого твердого тела, одним и тем же символом  $e_{31}$ . Компоненты  $\varepsilon_{\rho\rho} = \partial u_{\rho} / \partial \rho$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi} = u_{\rho} / \rho$  и  $\varepsilon_{zz} = \partial u_z / \partial z$  определяют деформации сжатия-растяжения вдоль координатных линий цилиндрической системы координат. Символом  $\Phi^{(1)}$  обозначен электрический потенциал в кольцевой области  $\{R_1 - d_1 \leq \rho \leq R_1 + d_1; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq z \leq \alpha\}$  под электродом №1. Необходимо подчеркнуть, что соотношения (15), (16) записаны для амплитудных значений характеристик гармонически изменяющихся во времени физических полей.

Подстановка выражений (15) и (16) в условие (11) дает дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных относительно искомого скалярного потенциала  $\Phi^{(1)}(\rho, z)$  электрического поля в деформируемом пьезоэлектрике.

В частном случае достаточно тонкого диска, когда выполняется неравенство  $\alpha/R < 1$ , можно утверждать, что в области частот, в которой длина упругой волны превосходит толщину пьезоэлектрического диска, электрические и упругие поля в его объеме практически не зависят от значений аксиальной координаты  $z$ , т. е. практически не меняют своих значений по толщине диска.

Если диск мягко закреплен по поверхности  $\{\rho = R; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq z \leq \alpha\}$ , то деформации сдвига обращаются в нуль на этой поверхности и на поверхностях  $z = 0$  и  $z = \alpha$ . Кроме того, на электродированной поверхности  $z = 0$  радиальный компонент  $D_{\rho} = 0$ . Радиальный компонент  $D_{\rho} = 0$  на боковой поверхности  $\rho = R$  пьезокерамического диска [4], на поверхности кольцевого электрода №1 и на оси симметрии диска, т. е. на оси  $Oz$ . Совокупность этих фактов позволяет предположить, что в тонком пьезокерамическом диске, в первом приближении, можно считать

$D_\rho = 0 \forall (\rho, \varphi, z) \in V$ , где  $V$  - объем диска. В этом случае вектор электрической индукции полностью определяется единственным, не равным нулю, аксиальным компонентом  $D_z$ , а условие (11) принимает следующий вид:

$$\partial D_z^{(1)} / \partial z = 0, \quad (17)$$

где символ  $D_z^{(1)}$  дополнительно подчеркивает то, что речь идет о векторе электрической индукции в кольцевой области  $\{R_1 - d_1 \leq \rho \leq R_1 + d_1; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq z \leq \alpha\}$  под входным электродом пьезоэлектрического трансформатора.

Из условия (17) следует, что аксиальный компонент  $D_z^{(1)}$  является функцией радиальной координаты  $\rho$  и не зависит от значений аксиальной координаты  $z$ , что находится в полном согласии с принятым выше предположением о слабой зависимости характеристик физических полей от значений аксиальной координаты в области частот, в кото-

рой выполняется неравенство  $\lambda \gg \alpha$  ( $\lambda$  - длина упругой волны). Это обстоятельство можно использовать для определения электрического состояния пьезокерамики в кольцевой области под электродом №1.

Поскольку

$$\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\varphi\varphi} = \partial u_\rho / \partial \rho + u_\rho / \rho = [\partial(\rho u_\rho) / \partial \rho] / \rho,$$

постольку определение (16) можно записать в следующем виде:

$$D_z^{(1)}(\rho) = \frac{e_{31}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_\rho^{(1)}] + e_{33} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} - \chi_{33}^\varepsilon \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z}, \quad (18)$$

где  $u_\rho^{(1)}(\rho, z)$  и  $u_z^{(1)}(\rho, z)$  - амплитудные значения компонентов вектора смещения материальных частиц в кольцевой области  $\{R_1 - d_1 \leq \rho \leq R_1 + d_1; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq z \leq \alpha\}$ .

Интегрируя по переменной  $z$  левую и правую части соотношения (18) и принимая при этом во внимание условие (17), получаем следующий результат:

$$\alpha D_z^{(1)}(\rho) = \frac{e_{31}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \int_0^\alpha u_\rho^{(1)}(\rho, z) dz \right] + e_{33} [u_z^{(1)}(\rho, \alpha) - u_z^{(1)}(\rho, 0)] - \chi_{33}^\varepsilon [\Phi^{(1)}(\alpha) - \Phi^{(1)}(0)]. \quad (19)$$

Введем обозначение

$$u_\rho^{(1)}(\rho) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha u_\rho^{(1)}(\rho, z) dz \quad (20)$$

и будем называть величину  $u_\rho^{(1)}(\rho)$  усредненным по толщине диска радиальным компо-

нентом вектора смещения материальных частиц в кольцевой области под электродом №1. Так как  $\Phi^{(1)}(\alpha) - \Phi^{(1)}(0) \equiv U_0$ , то соотношение (19) принимает следующий вид:

$$D_z^{(1)}(\rho) = \frac{e_{31}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_\rho^{(1)}(\rho)] + \frac{e_{33}}{\alpha} [u_z^{(1)}(\rho, \alpha) - u_z^{(1)}(\rho, 0)] - \chi_{33}^\varepsilon \frac{U_0}{\alpha}. \quad (21)$$

Подставляя выражение (21) в определение (7) амплитудного значения электрического заряда, получаем

$$Q_1 = 2\pi \left\{ e_{31} [\rho u_\rho^{(1)}(\rho)]_{R_1-d_1}^{R_1+d_1} + \frac{e_{33}}{\alpha} \int_{R_1-d_1}^{R_1+d_1} \rho [u_z^{(1)}(\rho, \alpha) - u_z^{(1)}(\rho, 0)] d\rho - \frac{\chi_{33}^\varepsilon}{2\alpha} [(R_1 + d_1)^2 - (R_1 - d_1)^2] U_0 \right\}. \quad (22)$$

Введем обозначение

$$u_z^{(1)}(z) = \frac{1}{2d_1 R_1} \int_{R_1-d_1}^{R_1+d_1} \rho u_z^{(1)}(\rho, z) d\rho \quad (23)$$

и будем называть величину  $u_z^{(1)}(z)$  усредненным по площади кольца

$\{R_1 - d_1 \leq \rho \leq R_1 + d_1; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  аксиальным компонентом вектора смещения  $\bar{u}(\rho, z)$  материальных частиц в кольцевой области под электродом №1. С учетом определения (23), соотношение (22) можно записать в следующем виде:

$$Q_1 = 2\pi e_{31} \left[ (R_1 + d_1) u_\rho^{(1)}(R_1 + d_1) - (R_1 - d_1) u_\rho^{(1)}(R_1 - d_1) \right] + 4\pi d_1 R_1 \frac{e_{33}}{\alpha} \left[ u_z^{(1)}(\alpha) - u_z^{(1)}(0) \right] - C_1^\varepsilon U_0, \quad (24)$$

где  $C_1^\varepsilon = 4\pi d_1 R_1 \chi_{33}^\varepsilon / \alpha$  – статическая электрическая емкость объема пьезокерамики под кольцевым электродом №1.

Так как пьезоэлектрический трансформатор по определению является линейной физической системой, то усредненные компоненты вектора смещения материальных частиц всегда можно представить в следующем виде:

$$u_\rho^{(1)}(\rho) = U_0 F_\rho^{(1)}(\rho), \quad u_z^{(1)}(z) = U_0 F_z^{(1)}(z), \quad (25)$$

где функции  $F_\rho^{(1)}(\rho)$  и  $F_z^{(1)}(z)$ , отличающиеся от усредненных компонентов  $u_\rho^{(1)}(\rho)$  и  $u_z^{(1)}(z)$  вектора смещения материальных частиц всего лишь на постоянный множитель  $U_0$ , имеют смысл чувствительности смещений в кольцевой области  $\{R_1 - d_1 \leq \rho \leq R_1 + d_1; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq z \leq \alpha\}$  к значениям амплитуды разности электрических потенциалов на кольцевом электроде №1.

Размерность величин  $F_\rho^{(1)}(\rho)$  и  $F_z^{(1)}(z)$  одинакова – метр, деленный на вольт. Функции  $F_\rho^{(1)}(\rho)$  и  $F_z^{(1)}(z)$  численно равны усредненным смещениям материальных частиц кольцевой области под электродом №1 при подаче на этот электрод разности электрических потенциалов с амплитудным значением  $U_0 = 1 \text{ В}$ .

С учетом определений (25) выражение (24) для расчета электрического заряда  $Q_1$  можно записать в следующем виде:

$$Q_1 = U_0 C_1^\varepsilon F_1(\omega, \Pi_1), \quad (26)$$

где безразмерная функция  $F_1(\omega, \Pi_1)$ , которая, в принципе, зависит от частоты  $\omega$  и набора физико-механических и геометрических параметров кольцевой области диска под электродом №1 (символ  $\Pi_1$  в списке аргументов функции), определяется следующим образом:

$$F_1(\omega, \Pi_1) = \frac{e_{31}\alpha}{2\chi_{33}^\varepsilon d_1} \left[ \left( 1 + \frac{d_1}{R_1} \right) F_\rho^{(1)}(R_1 + d_1) - \left( 1 - \frac{d_1}{R_1} \right) F_\rho^{(1)}(R_1 - d_1) \right] + \frac{e_{33}}{\chi_{33}^\varepsilon} \left[ F_z^{(1)}(\alpha) - F_z^{(1)}(0) \right] - 1. \quad (27)$$

Подставляя выражение (26) в определение (6) амплитуды электрического тока, а полученный результат – в закон Ома (5) для участка цепи, получаем расчетное соотношение для электрического импеданса  $Z_1$

$$Z_1 = - \frac{1}{i\omega C_1^\varepsilon F_1(\omega, \Pi_1)}. \quad (28)$$

Если диэлектрик под кольцевым электродом №1 не обладает пьезоэлектрическими свойствами, т. е.  $e_{31} = e_{33} = 0$ , то функция  $F_1(\omega, \Pi_1) = -1$  и выражение (28) обращается в общеизвестную формулу для расчета реактивного сопротивления конденсатора с электрической емкостью  $C_1^\varepsilon$ , т. е.  $Z_1 = 1/(i\omega C_1^\varepsilon)$ .

Подставляя выражение (28) в формулу (4), получаем

$$U_0 = \frac{U_1}{1 - i\omega C_1^\varepsilon F_1(\omega, \Pi_1) Z_{и}}. \quad (29)$$

Как следует из определения (29) амплитудного значения разности электрических по-

тенциалов на входном электроде пьезоэлектрического трансформатора, на частотах электромеханических резонансов, когда абсолютные значения функции  $F_1(\omega, \Pi_1)$  существенно возрастают, при любых конечных значениях выходного сопротивления  $Z_{и}$  будет наблюдаться значительное уменьшение модуля разности потенциалов  $U_0$ . Этот, в достаточной мере очевидный, факт оставался и остается незамеченным в известных постановках аналогичной задачи, когда генератор (источник) электрических сигналов наделяется качествами идеального источника электрического напряжения с выходным сопротивлением  $Z_{и} = 0$ .

Особо следует подчеркнуть, что разность потенциалов  $U_0$  определяется усредненными значениями компонентов вектора смещения (чувствительностей) материальных частиц кольцевой области  $\{R_1 - d_1 \leq \rho \leq R_1 + d_1; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq z \leq \alpha\}$ . Это обстоятельство имеет принципиальное значение,

так как появляется возможность совместного решения уравнений движения деформируемого пьезоэлектрика. Если бы функция  $F_1(\omega, \Pi_1)$  определялась точными значениями компонентов вектора смещения, совместное решение уравнений движения, т. е. системы уравнений второго порядка в частных производных, было бы принципиально невозможным.

В том случае, когда выполняется сильное неравенство  $\alpha/R \ll 1$ , т. е. когда диск можно считать бесконечно тонким, ситуация значительно упрощается, так как деформация  $\varepsilon_{zz}$  становится линейно зависимой функцией суммы деформаций  $\varepsilon_{\rho\rho}$  и  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ .

Из обобщенного закона Гука [3] для упругих сред с пьезоэлектрическими свойствами

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} + e_{kij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k},$$

где  $\sigma_{ij}$  - компонент тензора результирующих механических напряжений, следует, что в поляризованном по толщине пьезокерамическом диске деформациям сжатия-растяжения  $\varepsilon_{\rho\rho}$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$  и  $\varepsilon_{zz}$  соответствуют нормальные напряжения  $\sigma_{\rho\rho}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  и  $\sigma_{zz}$ , которые определяются следующими выражениями:

$$\sigma_{\rho\rho} = c_{11}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}^E (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}) + e_{31} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (30)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = c_{12}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{11}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{12}^E \varepsilon_{zz} + e_{31} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (31)$$

$$\sigma_{zz} = c_{12}^E (\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) + c_{33}^E \varepsilon_{zz} + e_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (32)$$

При записи выражений (30) – (32) одинаковые по величине материальные константы (элементы матриц (1) и (2)) обозначены одинаковыми символами.

На свободных от механических контактов с другими материальными объектами нижней ( $z = 0$ ) и верхней ( $z = \alpha$ ) поверхностях пьезокерамического диска должны, в соответствии с третьим законом Ньютона, выполняться следующие условия:

$$\sigma_{z\rho} \Big|_{z=0;\alpha} = \sigma_{zz} \Big|_{z=0;\alpha} = 0. \quad (33)$$

$$F_1^{(0)}(\omega, \Pi_1) = \frac{e_{31}^* \alpha}{2\chi_{33}^\sigma d_1} \left[ \left( 1 + \frac{d_1}{R_1} \right) F_\rho^{(1)}(R_1 + d_1) - \left( 1 - \frac{d_1}{R_1} \right) F_\rho^{(1)}(R_1 - d_1) \right] - 1. \quad (39)$$

Теперь рассмотрим процессы, которые происходят в области, где расположен коль-

Поскольку диск является очень тонким, постольку можно утверждать, что количественные характеристики его напряженно-деформированного состояния не зависят от значений аксиальной координаты  $z$ , т. е.  $\partial \sigma_{ij} / \partial z \cong 0$ . Из этого следует, что условие (33) должно выполняться в любой точке объема  $V$  тонкого пьезокерамического диска. Подставляя в левую часть соотношения (32) нуль, получаем следующее определение для деформации сжатия-растяжения в аксиальном направлении:

$$\varepsilon_{zz} = - \frac{c_{12}^E}{c_{33}^E} (\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) - \frac{e_{33}}{c_{33}^E} \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (34)$$

Подстановка выражения (34) в соотношения (30), (31) и (16) приводит к следующим результатам:

$$\sigma_{\rho\rho} = c_{11} \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12} \varepsilon_{\varphi\varphi} + e_{31}^* \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (35)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = c_{12} \varepsilon_{\rho\rho} + c_{11} \varepsilon_{\varphi\varphi} + e_{31}^* \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (36)$$

$$D_z = e_{31}^* (\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) - \chi_{33}^\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (37)$$

где  $c_{11} = c_{11}^E - (c_{12}^E)^2 / c_{33}^E$ ;  $c_{12} = c_{12}^E (1 - c_{12}^E / c_{33}^E)$ ;  $e_{31}^* = e_{31} - e_{33} c_{12}^E / c_{33}^E$  - материальные константы для планарного (плоского) напряженно-деформированного состояния поляризованной по толщине пьезокерамики;  $\chi_{33}^\sigma = \chi_{33}^\varepsilon + e_{33}^2 / c_{33}^E$  - диэлектрическая проницаемость поляризованного по толщине пьезокерамического диска для режима постоянства (равенства нулю) нормальных механических напряжений  $\sigma_{zz}$ . Соотношения (35) и (36) в сочетании с утверждением, что  $\sigma_{z\rho} = \sigma_{zz} = 0 \forall (\rho, z) \in V$ , позволяют полагать, что  $u_z \cong 0$  во всем колеблющемся диске.

При этом выражение (29) принимает следующий вид:

$$U_0 = \frac{U_1}{1 - i\omega C_1^\sigma F_1^{(0)}(\omega, \Pi_1) Z_{\text{и}}}, \quad (38)$$

где  $C_1^\sigma = 4\pi d_1 R_1 \chi_{33}^\sigma / \alpha$  - статическая электрическая емкость кольцевой области бесконечно тонкого диска под электродом №1;

цевой электрод №2, т. е. выходной электрод пьезоэлектрического трансформатора.

Очевидно, что в кольцевой области №2  $\{R_2 - d_2 \leq \rho \leq R_2 + d_2; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq z \leq \alpha\}$  амплитудные значения  $u_\rho^{(2)}(\rho, z)$  и  $u_z^{(2)}(\rho, z)$  гармонически изменяющихся во времени компонентов вектора смещения материальных частиц колеблющегося пьезоэлектрического диска можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_\rho^{(2)}(\rho, z) &= U_0 F_\rho^{(2)}(\rho, z), \\ u_z^{(2)}(\rho, z) &= U_0 F_z^{(2)}(\rho, z), \end{aligned} \quad (40)$$

где  $U_0$  - разность электрических потенциалов на возбуждающем упругие колебания диска кольцевом электроде №1 (рис. 1);  $F_\rho^{(2)}(\rho, z)$  и  $F_z^{(2)}(\rho, z)$  - чувствительности смещений в кольцевой области №2.

Амплитудное значение  $U_2$  падения напряжения на электрической нагрузке  $Z_n$ , т. е.

$$\begin{aligned} F_2(\omega, \Pi_2) &= \frac{e_{31}\alpha}{2\chi_{33}^\varepsilon d_2} \left[ \left( 1 + \frac{d_2}{R_2} \right) F_\rho^{(2)}(R_2 + d_2) - \left( 1 - \frac{d_2}{R_2} \right) F_\rho^{(2)}(R_2 - d_2) \right] + \\ &+ \frac{e_{33}}{\chi_{33}^\varepsilon} [F_z^{(2)}(\alpha) - F_z^{(2)}(0)]; \end{aligned}$$

$F_\rho^{(2)}(\rho)$  и  $F_z^{(2)}(z)$  - усредненные чувствительности.

Подставляя выражение (42) в определение тока  $I_2$ , а полученный результат - в формулу (41), приходим к выводу, что

$$U_2 = f_n(\omega) U_0 F_2(\omega, \Pi_2), \quad (43)$$

где  $f_n(\omega) = -i\omega C_2^\varepsilon Z_n / (1 - i\omega C_2^\varepsilon Z_n)$  - функция включения или нагрузочная характеристика выходного кольцевого электрода пьезоэлектрического трансформатора.

В режиме короткого замыкания ( $Z_n = 0$ ), о котором, как это ни странно, иногда рассуждают некоторые авторы, функция  $f_n(\omega) = 0$  и  $U_2 = 0$ . Этот факт самоочевиден и не требует никаких математических выкладок для доказательства его справедливости. В режиме холостого хода, когда  $Z_n \rightarrow \infty$ , функция включения  $f_n(\omega)$  при  $\omega = 0$  равна нулю, а при сколь угодно малых  $\omega > 0$   $f_n(\omega) = 1$ , т. е. в этом режиме функция включения является функцией Хэвисайда. Отсюда следует, что пьезоэлектрический приемник упругих колебаний не способен регистрировать статические давления и деформации. Это утверждение, не столь очевидное для практиков, фактически отменяет большую группу устройств пьезо-

на входном сопротивлении электронной схемы, которая непосредственно подключена к кольцевому электроду №2, определяется следующим образом:

$$U_2 = Z_n I_2, \quad (41)$$

где  $I_2 = -i\omega Q_2$  - амплитуда электрического тока в проводнике, который соединяет электрод №2 и электрическую нагрузку  $Z_n$ ;  $Q_2$  - амплитудное значение электрического заряда на кольцевом электроде №2.

Действуя так же, как и при определении электрического импеданса  $Z_1$ , приходим к следующему определению заряда  $Q_2$ :

$$Q_2 = C_2^\varepsilon U_0 F_2(\omega, \Pi_2) - C_2^\varepsilon U_2, \quad (42)$$

где  $C_2^\varepsilon = 4\pi d_2 R_2 \chi_{33}^\varepsilon / \alpha$  - статическая электрическая емкость кольцевой области №2;

электроники, которые представлены в монографии [5].

Скорость изменения функции включения  $f_n(\omega)$  определяется постоянной времени  $\tau_n = C_2^\varepsilon Z_n$  электрической цепи, которая соединяет электрод приемника с электрической нагрузкой. Значения модуля функции  $f_n(\omega)$  в зависимости от значения безразмерной частоты  $\Omega_n = \omega \tau_n$  показаны на рис. 2.

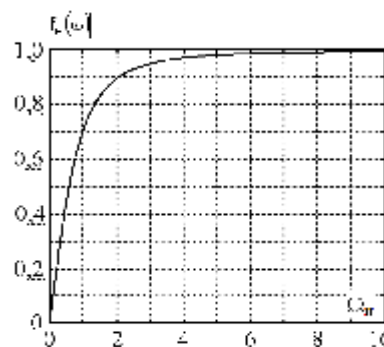


Рис. 2. Изменение модуля функции включения пьезоэлектрического приемника акустических волн

После подстановки в соотношение (43) выражения (29) можно записать следующее определение коэффициента трансформации  $K(\omega, \Pi)$  пьезоэлектрического трансформатора:



$$K(\omega, \Pi) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{f_H(\omega)F_2(\omega, \Pi_2)}{1 - i\omega C_1^\varepsilon F_1(\omega, \Pi_1)Z_H}. \quad (44)$$

В случае очень тонкого пьезокерамического диска, когда выполняется сильное неравенство  $\alpha/R \ll 1$ , выражение (44) записывается следующим образом:

$$F_2^{(0)}(\omega, \Pi_2) = \frac{e_{31}^* \alpha}{2\chi_{33}^\sigma d_2} \left[ \left( 1 + \frac{d_2}{R_2} \right) F_p^{(2)}(R_2 + d_2) - \left( 1 - \frac{d_2}{R_2} \right) F_p^{(2)}(R_2 - d_2) \right];$$

функция  $F_1^{(0)}(\omega, \Pi_1)$  определена соотношением (39).

Выражения (44) и (45), имеющие смысл математических моделей пьезоэлектрических трансформаторов, работающих с использованием осесимметричных радиальных колебаний пьезокерамических дисков, построены с минимальным числом упрощающих реальную ситуацию предположений. Это позволяет утверждать, что предложенная схема построения доставляет математические модели, которые в достаточной мере адекватны реальным объектам и физическим процессам, которые в них существуют.

Для того чтобы наполнить определение (44) или (45) конкретным физическим содержанием, необходимо определить компоненты вектора смещения материальных частиц колеблющегося пьезокерамического диска. Эта процедура составляет предмет отдельного исследования.

#### Выводы

Рассмотрены физические процессы в пьезоэлектрических трансформаторах, которые работают с использованием осесимметричных радиальных колебаний пьезокерамического диска. Предложена схема построения математических моделей пьезоэлектрических трансформаторов этой конструкции, которые адекватны реальным объектам и происходящим в них физическим процессам.

#### Список литературы

1. Лавриненко В. В. Пьезоэлектрические трансформаторы / В. В. Лавриненко. – М. : Энергия, 1975. – 112 с.
2. Математическая энциклопедия. Том 2: Д – Коо. – М. : Советская энциклопедия, 1979. – С. 951–952.
3. Петрищев О. Н. Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Часть 1. Гармонические колебания пьезокерамиче-

$$K^{(0)}(\omega, \Pi) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{f_H^{(0)}(\omega)F_2^{(0)}(\omega, \Pi_2)}{1 - i\omega C_1^\varepsilon F_1^{(0)}(\omega, \Pi_1)Z_H}. \quad (45)$$

где  $f_H^{(0)}(\omega) = -i\omega C_2^\sigma Z_H / (1 - i\omega C_2^\sigma Z_H)$ ;

$$C_2^\sigma = 4\pi d_2 R_2 \chi_{33}^\sigma / \alpha;$$

ских элементов в вакууме и метод резонанса – антирезонанса / О. Н. Петрищев. – К. : Аверс, 2012. – 300 с.

4. Гринченко В. Т. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – К. : Наукова думка, 1989. – 280 с.
5. Джагунов Р. Г. Пьезоэлектронные устройства вычислительной техники, систем контроля и управления : справочник / Р. Г. Джагунов, А. А. Ерофеев. – СПб. : Политехника, 1994. – 608 с.
6. Buchacz, A., Placzek, M. and Wrobel, A. (2014). Modelling of passive vibration damping using piezoelectric transducers – the mathematical model. *Maintenance and reliability*, 16 (2), pp. 301–306.
7. Livingston, D., Kiran Kumar, P. and Venugopal, N. (2013). Modeling and simulation of multiple piezoelectric transformer converters. *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering*, 3 (8), pp. 237–245.
8. Paerand, Yu. and Kryvoshei, D. (2011). Secondary power supplies with piezoelectric transformers. *Electronics and Nanotechnology*. Kyiv, p. 55.
9. Buchacz, A. and Wrobel, A. (2007). Piezoelectric layer modelling by equivalent circuit and graph method. *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*, 20 (1-2), pp. 299–302.
10. Cheng, K. W. E., Ho, Y. L., Ho, S. L. et al (2005). Modeling and analysis of piezoelectric transformer using multi-mesh loop matrix circuit under square-wave excitation conditions. *IAS*, pp. 2207–2211.
11. Huang, Y. and Ling, Z. (2004). Progress in research on piezoelectric transformers. *Electronic Components & Materials*, 23 (1), pp. 7–10.

## References

1. Lavrinenko, V. V. (1975). Piezoelectric transformers. Moscow: Energiya, 112 p. [in Russian].
2. Mathematical encyclopedia(1979). Vol. 2: D – Koo. Moscow: Sovietskaya encyclopedia, pp. 951–952 [in Russian].
3. Petrishchev, O. N. (2012). Harmonic oscillations of piezoceramic elements. Part 1. Harmonic vibrations of piezoceramic elements in vacuum and a method of resonance – antiresonance. Kyiv: Avers, 300 p. [in Russian].
4. Grinchenko, V. T., Ulitko, A. F. and Shulga, N. A. (1989). Mechanics of related fields in structural elements. Vol. 5. Electroelasticity. Kyiv: Naukova dumka, 280 p. [in Russian].
5. Dzhagupov, R. G. and Yerofeev, A. A. (1994). Piezoelectronic computer facilities, monitoring and control systems. St. Petersburg: Politehnika, 608 p. [in Russian].
6. Buchacz, A., Placzek, M. and Wrobel, A. (2014). Modelling of passive vibration damping using piezoelectric transducers – the mathematical model. *Maintenance and reliability*, 16 (2), pp. 301–306.
7. Livingston, D., Kiran Kumar, P. and Venugopal, N. (2013). Modeling and simulation of multiple piezoelectric transformer converters. *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering*, 3 (8), pp. 237–245.
8. Paerand, Yu. and Kryvoshei, D. (2011). Secondary power supplies with piezoelectric transformers. *Electronics and Nanotechnology*. Kyiv, p. 55.
9. Buchacz, A. and Wrobel, A. (2007). Piezoelectric layer modelling by equivalent circuit and graph method. *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*, 20 (1-2), pp. 299–302.
10. Cheng, K. W. E., Ho, Y. L., Ho, S. L. et al (2005). Modeling and analysis of piezoelectric transformer using multi-mesh loop matrix circuit under square-wave excitation conditions. *IAS*, pp. 2207–2211.
11. Huang, Y. and Ling, Z. (2004). Progress in research on piezoelectric transformers. *Electronic Components & Materials*, 23 (1), pp. 7–10.

O. N. Petrishchev<sup>1</sup>, Dr. Tech.Sc., professor,

K. V. Bazilo<sup>2</sup>, Ph.D. (Eng.), associate professor

<sup>1</sup>National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute"  
Peremogy ave., 37, Kyiv, 03056, Ukraine

<sup>2</sup>Cherkasy State Technological University  
Shevchenko blvd, 460, Cherkasy, 18006, Ukraine

## PRINCIPLES OF MATHEMATICAL MODELING OF TRANSFORMERS THAT OPERATE ON PLANAR AXISYMMETRIC VIBRATIONS OF PIEZOCERAMIC DISKS

*With the help of a personal computer it is possible in a few hours to model many combinations of geometric, physical and mechanical parameters of specific design of piezoelectric transformer, and to find a combination thereof, which provides an implementation of the devices specified parameters. This allows to reduce sharply the number of natural experiments, which are inevitably carried out in the process of new devices development. In addition, using a mathematical model it is easy to determine the characteristic sensitivity of piezoelectric transformer to variations of elements parameters of its design. With the access to these dependences, we can implement a rational choice of products manufacturing technology, i.e. choose the least expensive technology from a number of ones. Thus, high-quality mathematical model can significantly reduce the time and cost of developing of piezoelectric transformers new models.*

*It is these sufficiently obvious circumstances that encouraged and encourage professionals to develop various aspects of the theory of piezoelectric transformers.*

*In most papers the described methods of piezoelectric transformers models constructing are mostly based on the use of equivalent electrical circuits and do not allow to analyze stress-strain state of solids with piezoelectric effects.*

*Based on the above, it can be argued that currently there are no reliable and valid methods of constructing of mathematical models of piezoelectric transformers, which could be used as a theoretical basis for characteristics and parameters calculating of this class of functional elements of modern piezoelectronics.*

*In this paper, using the simplest example of axially symmetric radial oscillations of piezoelectric disc the principles of mathematical models constructing that are sufficiently adequate to real devices and occurring physical processes are set out.*

*Physical processes in piezoelectric transformers, which operate using axially symmetric radial oscillations of piezoceramic disc, are considered. The scheme of mathematical models constructing of piezoelectric transformer of such construction that is sufficiently adequate to real objects and occurring physical processes is offered.*

**Keywords:** *piezoelectric transformer, axially symmetric oscillations, physical processes, mathematical model.*

*Статтю представляє д.т.н., професор О. М. Петріщев, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут».*