

УДК 621.373.826.032:534.232.082.73

**О. Н. Петрищев**, *д.т.н., профессор*,  
Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»  
проспект Победы, 37, Киев, 03056, Украина  
**К. В. Базило**, *к.т.н., доцент*  
Черкасский государственный технологический университет  
б-р Шевченко, 460, Черкассы, 18006, Украина

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОСЕКЦИОННОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТРАНСФОРМАТОРА С КОЛЬЦЕВЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ ВО ВТОРИЧНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

*Актуальность применения различных функциональных элементов пьезоэлектроники в силовых и информационных системах объясняется, прежде всего, их высокой надежностью. Одним из основных элементов таких систем является пьезокерамический трансформатор. Однако в настоящее время отсутствуют надежные и достоверные методики построения математических моделей пьезоэлектрических трансформаторов, которые могли бы использоваться в качестве теоретических основ расчета характеристик и параметров этого класса функциональных элементов современной пьезоэлектроники.*

*Основные положения настоящей статьи можно зафиксировать следующим образом. Впервые предлагается не содержащая внутренних противоречий схема построения математической модели четырехсекционного дискового пьезоэлектрического трансформатора. Предложенная схема сохраняет свою логическую конструкцию в широком диапазоне значений числа секций. Рассмотрены особенности построения математических моделей многосекционных трансформаторов, которые возникают при групповом включении секций. По мнению авторов, настоящая статья завершает построение теории пьезоэлектрических трансформаторов с радиальными колебаниями в тонких, поляризованных по толщине, пьезокерамических дисках.*

**Ключевые слова:** пьезоэлектрический трансформатор, радиальные колебания, физические процессы, математическая модель.

**Введение.** Актуальность применения различных функциональных элементов пьезоэлектроники в силовых и информационных системах объясняется, прежде всего, их высокой надежностью [1]. Одним из основных элементов таких систем является пьезокерамический трансформатор [2].

Конечной целью математического моделирования физического состояния колеблющихся пьезокерамических элементов является качественное и количественное описание характеристик и параметров существующих в них электрических и упругих полей. В настоящее время отсутствует целостная методика построения математических моделей пьезоэлектрических трансформаторов, которые могли бы использоваться в качестве теоретических основ расчета их характеристик и параметров [3]. Таким образом, актуальность разработки физически содержательных математических моделей дисковых пьезоэлектри-

ческих трансформаторов сохраняется и в настоящее время.

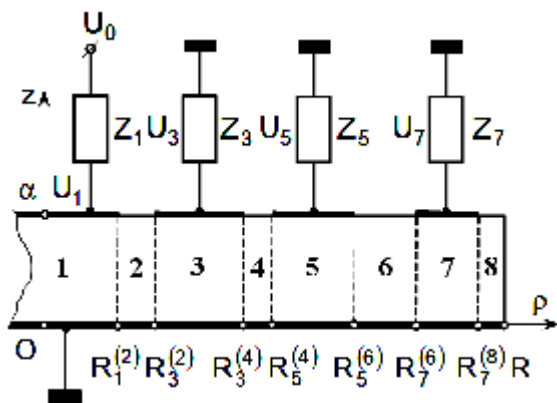
Чрезвычайно широкие возможности пьезотрансформаторов позволяют использовать их при создании разнообразных аналоговых и дискретных устройств преобразования сигналов. Следует отметить, что на основе пьезотрансформаторов возможно создание разнообразных управляющих устройств, способных выполнять различные функции преобразования сигналов. Для этого в элемент пьезотрансформатора вводится дополнительная секция электродов, и связь между секциями осуществляется только механическим путем [4].

**Целью** данной статьи является показать особенности вычисления коэффициентов трансформации в трансформаторе с несколькими вторичными электрическими цепями, которые возникают из-за акустической связи радиальных колебаний в различных областях пьезокерамического диска.

**1. Определение электрических потенциалов во вторичных электрических цепях многосекционного дискового пьезоэлектрического трансформатора**

Рассмотрим дисковый пьезоэлектрический трансформатор, который имеет две и более вторичные электрические цепи. Такие трансформаторы в дальнейшем будем называть многосекционными.

На рис. 1 схематически изображен дисковый трансформатор с тремя кольцевыми электродами во вторичных электрических цепях. Электрод первичной электрической цепи имеет форму круга радиуса  $R_1^{(2)}$ . К нему подключен источник разности электрических потенциалов  $U_0 e^{i\omega t}$  ( $U_0$  – амплитуда разности электрических потенциалов;  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица;  $\omega$  – круговая частота;  $t$  – время). Выходное сопротивление источника электрических потенциалов обозначено на рис. 1 символом  $Z_1$ . Символами  $Z_3, \dots, Z_7$  обозначены электрические импедансы нагрузок во вторичных электрических цепях трансформатора. Диск выполнен из поляризованной по толщине пьезокерамики типа ЦТС. Нижняя поверхность ( $z = 0$ ) диска полностью электродирована и заземлена.



**Рис. 1. Расчетная схема пьезоэлектрического трансформатора с тремя вторичными электрическими цепями**

Будем полагать, что амплитудное значение  $U_0$  входного электрического воздействия невелико, т. е. минимум на три порядка меньше разности потенциалов, которая была использована в процессе электрической поляризации диска. При этом пьезоэлектрический трансформатор можно рассматривать как линейную физическую систему, т. е. электрические потенциалы во вторичных электрических цепях изменяются во времени также по гармоническому закону  $e^{i\omega t}$ . Очевидно, что математической моделью показанного на рис. 1 пьезокерамического трансформатора будет являться набор из трех функций

$$K_{2n+1}(\omega) = \frac{U_{2n+1}(\omega)}{U_0}, n = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где  $K_{2n+1}(\omega)$  – коэффициент трансформации в  $n$ -й вторичной электрической цепи;  $U_{2n+1}(\omega)$  – падение электрического напряжения на электрической нагрузке  $Z_{2n+1}$  в  $n$ -й вторичной электрической цепи.

Построим выражения для расчета электрических потенциалов  $U_{2n+1}(\omega)$ .

Будем полагать, что круговая частота  $\omega$  принадлежит частотному диапазону, в пределах которого пьезокерамический диск можно считать тонким, и утверждать, что его напряженно-деформированное состояние определяется в основном радиальными смещениями материальных частиц. В этом случае физическое состояние пьезоэлектрика в областях под электродами на поверхности  $z = \alpha$  определяется обобщенным законом Гука и законом электрической поляризации диэлектрика с пьезоэлектрическими свойствами, которые записываются следующими соотношениями [5].

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2n+1)}(\rho) = c_{11}\varepsilon_{\rho\rho}^{(2n+1)}(\rho) + c_{12}\varepsilon_{\phi\phi}^{(2n+1)}(\rho) - e_{31}^*E_z^{(2n+1)},$$

$$\sigma_{\phi\phi}^{(2n+1)}(\rho) = c_{12}\varepsilon_{\rho\rho}^{(2n+1)}(\rho) + c_{11}\varepsilon_{\phi\phi}^{(2n+1)}(\rho) - e_{31}^*E_z^{(2n+1)}, \text{ и } n = 0, 1, 2, 3, \quad (2)$$

$$D_z^{(2n+1)}(\rho) = e_{31}^*[\varepsilon_{\rho\rho}^{(2n+1)}(\rho) + \varepsilon_{\phi\phi}^{(2n+1)}(\rho)] + \chi_{33}^*E_z^{(2n+1)}, \quad (3)$$

где  $\sigma_{\rho\rho}^{(2n+1)}(\rho)$  и  $\sigma_{\phi\phi}^{(2n+1)}(\rho)$  – механические напряжения сжатия-растяжения в области  $2n + 1$  вдоль радиальной и окружной осей ци-

линдрической системы координат  $\rho, \phi, z$  (рис. 1) соответственно;  $c_{11} = c_{11}^E - (c_{12}^E)^2 / c_{33}^E$

и  $c_{12} = c_{12}^E (1 - c_{12}^E / c_{33}^E)$  - модули упругости для режима планарных (радиальных) колебаний тонкого пьезокерамического диска;  $\varepsilon_{\rho\rho}^{(2n+1)}(\rho) = \partial u_{\rho}^{(2n+1)}(\rho) / \partial \rho$  и  $\varepsilon_{\phi\phi}^{(2n+1)}(\rho) = u_{\rho}^{(2n+1)}(\rho) / \rho$  - деформации сжатия-растяжения вдоль радиальной и окружной оси;  $u_{\rho}^{(2n+1)}(\rho)$  - радиальное смещение материальных частиц пьезокерамического диска. Символами  $e_{31}^* = e_{31} - e_{33} c_{12}^E / c_{33}^E$  и  $\chi_{33}^* = \chi_{33} + e_{33}^2 / c_{33}^E$  обозначены пьезоэлектрический модуль и диэлектрическая проницаемость для режима планарных колебаний. Символом  $E_z^{(2n+1)}$  в соотношениях (2) и (3) обозначена напряженность электрического поля под  $2n + 1$ -ым электродом;  $D_z^{(2n+1)}(\rho)$  - аксиальный компонент вектора электрической индукции. Матрицы материальных констант  $c_{\beta\lambda}^E$ ,  $e_{k\beta}$  и  $\chi_{ij}^E$  поляризованной в направлении координатной оси  $Oz$  пьезокерамики приведены в работе [5]. Там же показано, что  $E_z^{(2n+1)} = -U_{2n+1}(\omega) / \alpha$ .

Для кольцевых областей с четными номерами  $m = 2, 4, 6, 8$ , поверхности  $z = \alpha$  не покрыты слоем металла, электрическая индукция  $D_z^{(m)}(\rho) = 0$ , а механические напряжения  $\sigma_{\rho\rho}^{(m)}(\rho)$  и  $\sigma_{\phi\phi}^{(m)}(\rho)$  определяются следующим образом:

$$\sigma_{\rho\rho}^{(m)}(\rho) = c_{11}^D \frac{\partial u_{\rho}^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12}^D \frac{u_{\rho}^{(m)}(\rho)}{\rho},$$

$$Q_{2n+1}(\omega) = 2\pi e_{31}^* \left[ R_{2n+1}^{(2n+2)} u_{\rho}^{(2n+1)}(R_{2n+1}^{(2n+2)}) - R_{2n+1}^{(2n)} u_{\rho}^{(2n+1)}(R_{2n+1}^{(2n)}) \right] - C_{2n+1}^* U_{2n+1}(\omega),$$

где  $C_{2n+1}^* = \pi \left[ \left( R_{2n+1}^{(2n+2)} \right)^2 - \left( R_{2n+1}^{(2n)} \right)^2 \right] \chi_{33}^* / \alpha$  - электрическая емкость  $(2n + 1)$ -го кольцевого электрода.

$$Q_{2n+1}(\omega) = \frac{2\pi e_{31}^* C_{2n+1}^*}{\chi_{33}^* \left[ \left( R_{2n+1}^{(2n+2)} \right)^2 - \left( R_{2n+1}^{(2n)} \right)^2 \right]} \left[ R_{2n+1}^{(2n+2)} u_{\rho}^{(2n+1)}(R_{2n+1}^{(2n+2)}) - R_{2n+1}^{(2n)} u_{\rho}^{(2n+1)}(R_{2n+1}^{(2n)}) \right] - C_{2n+1}^* U_{2n+1}(\omega). \quad (6)$$

Так как  $U_{2n+1}(\omega) = I_{2n+1} Z_{2n+1}$  ( $n = 1, 2, 3$ ), то, после подстановки выражения (6) в опре-

$$U_{2n+1}(\omega) = \frac{2\pi e_{31}^* f_{2n+1}(\omega)}{\chi_{33}^* \left[ \left( R_{2n+1}^{(2n+2)} \right)^2 - \left( R_{2n+1}^{(2n)} \right)^2 \right]} \left[ R_{2n+1}^{(2n+2)} u_{\rho}^{(2n+1)}(R_{2n+1}^{(2n+2)}) - R_{2n+1}^{(2n)} u_{\rho}^{(2n+1)}(R_{2n+1}^{(2n)}) \right], \quad (7)$$

$$\sigma_{\phi\phi}^{(m)}(\rho) = c_{12}^D \frac{\partial u_{\rho}^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{11}^D \frac{u_{\rho}^{(m)}(\rho)}{\rho}, \quad (4)$$

где  $c_{11}^D = c_{11} + (e_{31}^*)^2 / \chi_{33}^*$ ,  $c_{12}^D = c_{12} + (e_{31}^*)^2 / \chi_{33}^*$

- модули упругости тонкого пьезокерамического диска в режиме постоянства (равенства нулю) электрической индукции.

Амплитуды электрических токов  $I_{2n+1}(\omega)$  во вторичных электрических цепях пьезоэлектрического трансформатора определяются скоростью изменения электрического заряда  $Q_{2n+1}(\omega)$  на  $(2n + 1)$ -ом кольцевом электроде, причем

$$I_{2n+1}(\omega) = -i\omega Q_{2n+1}(\omega), \quad n = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Амплитудные значения электрических зарядов

$$Q_{2n+1}(\omega) = 2\pi \int_{R_{2n+1}^{(2n)}}^{R_{2n+1}^{(2n+2)}} \rho D_z^{(2n+1)}(\rho) d\rho, \quad n = 1, 2, 3,$$

где  $R_{2n+1}^{(2n)}$  и  $R_{2n+1}^{(2n+2)}$  - левая и правая границы кольцевой области под электродом номера  $2n + 1$  (рис. 1). Поскольку

$$D_z^{(2n+1)}(\rho) = e_{31}^* \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho u_{\rho}^{(2n+1)}(\rho) \right] - \chi_{33}^* \frac{U_{2n+1}(\omega)}{\alpha},$$

постольку

Выражение для расчета электрического заряда на  $(2n + 1)$ -ом электроде можно записать в следующем виде

где  $f_{2n+1}(\omega) = -i\omega C_{2n+1}^* Z_{2n+1} / [1 - i\omega C_{2n+1}^* Z_{2n+1}]$  - функция включения  $(2n+1)$ -го кольцевого электрода во вторичную электрическую цепь.

Для того, чтобы наполнить соотношение (7) конкретным содержанием, необходимо корректно определить радиальные смещения в различных областях пьезокерамического диска.

## 2. Определение радиальных смещений материальных частиц диска и построение математической модели многосекционного трансформатора

Радиальные смещения  $u_p^{(k)}(\rho)$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) во всех областях диска удовлетворяют одному и тому уравнению установившихся радиальных колебаний тонкого пьезокерамического диска, которое можно записать в следующем виде

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}^{(k)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} [\sigma_{\rho\rho}^{(k)}(\rho) - \sigma_{\phi\phi}^{(k)}(\rho)] + \rho_0 \omega^2 u_p^{(k)}(\rho) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 8, \quad (8)$$

где  $\rho_0$  - плотность пьезокерамики;  $\sigma_{\rho\rho}^{(k)}(\rho)$  и  $\sigma_{\phi\phi}^{(k)}(\rho)$  - нормальные механические напряжения в  $k$ -ой по номеру области пьезокерамического диска, определенные соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(2n+1)}(\rho) &= c_{11} \left[ \frac{\partial u_p^{(2n+1)}(\rho)}{\partial \rho} + \xi \frac{u_p^{(2n+1)}(\rho)}{\rho} + \frac{e_{31}^*}{c_{11}\alpha} U_{2n+1}(\omega) \right], \\ \sigma_{\phi\phi}^{(2n+1)}(\rho) &= c_{11} \left[ \xi \frac{\partial u_p^{(2n+1)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{u_p^{(2n+1)}(\rho)}{\rho} + \frac{e_{31}^*}{c_{11}\alpha} U_{2n+1}(\omega) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\xi = c_{12}/c_{11} < 1$  - безразмерный параметр.

Подставляя выражения (10) в уравнение

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u_p^{(2n+1)}}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u_p^{(2n+1)}}{\partial \rho} + [(k\rho)^2 - 1] u_p^{(2n+1)} = 0, \quad (11)$$

где  $k = \omega / \sqrt{c_{11}/\rho_0}$  - волновое число радиальных колебаний в  $2n+1$ -ой области под соответствующим электродом. Решение уравне-

$$u_p^{(1)}(\rho) = A_1 J_1(k\rho) \forall \rho \in [0, R_1^{(2)}], \quad u_p^{(3)}(\rho) = A_4 J_1(k\rho) + A_5 N_1(k\rho) \forall \rho \in [R_3^{(2)}, R_3^{(4)}],$$

$$u_p^{(5)}(\rho) = A_8 J_1(k\rho) + A_9 N_1(k\rho) \forall \rho \in [R_5^{(4)}, R_5^{(6)}], \quad u_p^{(7)}(\rho) = A_{12} J_1(k\rho) + A_{13} N_1(k\rho) \forall \rho \in [R_7^{(6)}, R_7^{(8)}], \quad (12)$$

где  $A_1, \dots, A_{13}$  - подлежащие определению константы;  $J_1(k\rho)$  и  $N_1(k\rho)$  - функции Бесселя и Неймана первого порядка.

Подстановка выражений (4) в уравнение установившихся радиальных колебаний (8) позволяет привести его к следующему виду

(2) для областей нечетных номеров (рис. 1) и формулами (4) для кольцевых областей с четными номерами.

Для единообразного описания механических напряжений  $\sigma_{\rho\rho}^{(2n+1)}(\rho)$  и  $\sigma_{\phi\phi}^{(2n+1)}(\rho)$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) в областях под электродами, будем полагать, что амплитудное значение потенциала на электроде первичной электрической цепи является известной величиной  $U_1$ , которая определяется стандартным соотношением:

$$U_1 = \frac{U_0 Z_{\text{эл}}^{(1)}}{Z_1 + Z_{\text{эл}}^{(1)}}, \quad (9)$$

где  $Z_{\text{эл}}^{(1)}$  - электрический импеданс первой области пьезокерамического диска.

Так как  $E_z^{(2n+1)} = -U_{2n+1}(\omega)/\alpha$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ), а деформации  $\varepsilon_{\rho\rho}^{(2n+1)}(\rho) = \partial u_p^{(2n+1)}(\rho)/\partial \rho$  и  $\varepsilon_{\phi\phi}^{(2n+1)}(\rho) = u_p^{(2n+1)}(\rho)/\rho$ , то выражения (2) можно записать в следующем виде

(8), получаем следующую конструкцию

ния (11) для областей электрического диска под электродами имеют следующий вид:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u_p^{(m)}}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u_p^{(m)}}{\partial \rho} + [(\gamma\rho)^2 - 1] u_p^{(m)} = 0, \quad m = 2, 4, 6, 8, \quad (13)$$

где  $\gamma = \omega / \sqrt{c_{11}^D/\rho_0}$  - волновое число радиальных колебаний в неэлектродированных коль-

цевых областях диска. Решения уравнения (13) для этих областей имеют вид:

$$\begin{aligned} u_p^{(2)}(\rho) &= A_2 J_1(\gamma\rho) + A_3 N_1(\gamma\rho) \forall \rho \in [R_1^{(2)}, R_3^{(2)}], \\ u_p^{(4)}(\rho) &= A_6 J_1(\gamma\rho) + A_7 N_1(\gamma\rho) \forall \rho \in [R_3^{(4)}, R_5^{(4)}], \\ u_p^{(6)}(\rho) &= A_{10} J_1(\gamma\rho) + A_{11} N_1(\gamma\rho) \forall \rho \in [R_5^{(6)}, R_7^{(6)}], \\ u_p^{(8)}(\rho) &= A_{14} J_1(\gamma\rho) + A_{15} N_1(\gamma\rho) \forall \rho \in [R_7^{(8)}, R], \end{aligned} \quad (14)$$

где  $A_2, \dots, A_{15}$  - подлежащие определению константы;  $J_1(\gamma\rho)$  и  $N_1(\gamma\rho)$  - по-прежнему функции Бесселя и Неймана.

Единственное (однозначное) описание смещений  $u_p^{(2n+1)}(\rho)$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) и  $u_p^{(m)}(\rho)$  ( $m = 2, 4, 6, 8$ ) предполагает корректное опре-

$$\begin{aligned} u_p^{(2n+1)}(\rho) - u_p^{(m)}(\rho) &= 0 \forall \rho = R_{2n+1}^{(m)}, \\ \sigma_{\rho\rho}^{(2n+1)}(\rho) - \sigma_{\rho\rho}^{(m)}(\rho) &= 0 \forall \rho = R_{2n+1}^{(m)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Не трудно подсчитать (рис. 1), что условных границ раздела  $R_{2n+1}^{(m)}$  кольцевых областей диска всего семь. Следовательно, условия сопряжения (15) образуют всего четырнадцать уравнений, в которых содержится пятнадцать искомых констант  $A_1, \dots, A_{15}$ . Недостающее, пятнадцатое, уравнение доставляет условие на границе  $\rho = R$  пьезокерамического диска. Будем полагать, что на контуре

деление всех пятнадцати констант  $A_1, \dots, A_{15}$ .

На условных границах разделения областей, т. е. на окружностях  $R_{2n+1}^{(m)}$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ;  $m = 2, 4, 6, 8$ ) должны выполняться условия кинематического и динамического сопряжения напряженно-деформированного состояния в области под электродом и в области без электродирования верхней поверхности  $z = \alpha$  пьезоэлектрического диска. Эти условия записываются следующими соотношениями:

$\rho = R$  реализовано абсолютно мягкое закрепление диска. При этом, согласно третьему закону Ньютона, должно выполняться условие

$$\sigma_{\rho\rho}^{(8)}(R) = 0. \quad (16)$$

Подставляя решения (12) и (14) в соотношения (2) и (4), получаем следующие выражения для расчета нормальных напряжений  $\sigma_{\rho\rho}^{(k)}(\rho)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho) &= c_{11} k \left\{ A_1 \left[ J_0(k\rho) - \frac{1-\xi}{k\rho} J_1(k\rho) \right] + \frac{e_{31}^* U_1}{c_{11} k \alpha} \right\}, \\ \sigma_{\rho\rho}^{(2n+1)}(\rho) &= c_{11} k \left\{ A_{4n} \left[ J_0(k\rho) - \frac{1-\xi}{k\rho} J_1(k\rho) \right] + \right. \\ &+ \left. A_{4n+1} \left[ N_0(k\rho) - \frac{1-\xi}{k\rho} N_1(k\rho) \right] + \frac{e_{31}^* U_{2n+1}}{c_{11} k \alpha} \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \\ \sigma_{\rho\rho}^{(2m)}(\rho) &= c_{11}^D \gamma \left\{ A_{4m-2} \left[ J_0(\gamma\rho) - \frac{1-\xi_1}{\gamma\rho} J_1(\gamma\rho) \right] + \right. \\ &+ \left. A_{4m-1} \left[ N_0(\gamma\rho) - \frac{1-\xi_1}{\gamma\rho} N_1(\gamma\rho) \right] \right\}, \quad m = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\xi = c_{12}/c_{11}$ ;  $\xi_1 = c_{12}^D/c_{11}^D$ .

Подставляя решения (12), (14) и определения (17) в условия (15) и (16), получаем неоднородную систему из пятнадцати линейных алгебраических уравнений, в которых содержится пятнадцать искомых констант  $A_1, \dots, A_{15}$ . Очевидно, что эта система уравнений разрешается относительно искомых констант единственным образом. В общем виде

эта система уравнений может быть записана следующим образом:

$$m_j^{(k)} A_k = P_j, \quad j, k = 1, 2, \dots, 15, \quad (18)$$

где предполагается суммирование по дважды повторяющемуся индексу  $k$ .

Определитель  $D_0$  системы уравнений (18) является определителем ленточной матрицы  $M_0 = \|m_j^{(k)}\|$ , ненулевые элементы  $m_j^{(k)}$  ( $j$  - номер строки;  $k$  - номер столбца) которой со-

средоточены в окрестности диагонали, проведенной из левого верхнего угла в правый нижний угол. Ненулевые элементы матрицы  $M_0$  определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} m_1^{(1)} &= J_1(kR_1^{(2)}); m_1^{(2)} = -J_1(\gamma R_1^{(2)}); \\ m_1^{(3)} &= -N_1(\gamma R_1^{(2)}); \\ m_2^{(1)} &= J_0(kR_1^{(2)}) - \frac{1-\xi}{kR_1^{(2)}} J_1(kR_1^{(2)}); \\ m_2^{(2)} &= -\eta \left[ J_0(\gamma R_1^{(2)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_1^{(2)}} J_1(\gamma R_1^{(2)}) \right]; \\ m_2^{(3)} &= -\eta \left[ N_0(\gamma R_1^{(2)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_1^{(2)}} N_1(\gamma R_1^{(2)}) \right]; \eta = \frac{c_{11}^D \gamma}{c_{11} k}; \\ m_3^{(2)} &= J_1(\gamma R_3^{(2)}); m_3^{(3)} = N_1(\gamma R_3^{(2)}); \\ m_3^{(4)} &= -J_1(kR_3^{(2)}); m_3^{(5)} = -N_1(kR_3^{(2)}); \\ m_4^{(2)} &= \eta \left[ J_0(\gamma R_3^{(2)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_3^{(2)}} J_1(\gamma R_3^{(2)}) \right]; \\ m_4^{(3)} &= \eta \left[ N_0(\gamma R_3^{(2)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_3^{(2)}} N_1(\gamma R_3^{(2)}) \right]; \\ m_4^{(4)} &= -\left[ J_0(kR_3^{(2)}) - \frac{1-\xi}{kR_3^{(2)}} J_1(kR_3^{(2)}) \right]; \\ m_4^{(5)} &= -\left[ N_0(kR_3^{(2)}) - \frac{1-\xi}{kR_3^{(2)}} N_1(kR_3^{(2)}) \right]; \\ m_5^{(4)} &= J_1(kR_3^{(4)}); m_5^{(5)} = N_1(kR_3^{(4)}); \\ m_5^{(6)} &= -J_1(\gamma R_3^{(4)}); m_5^{(7)} = -N_1(\gamma R_3^{(4)}); \\ m_6^{(4)} &= \left[ J_0(kR_3^{(4)}) - \frac{1-\xi}{kR_3^{(4)}} J_1(kR_3^{(4)}) \right]; \\ m_6^{(5)} &= \left[ N_0(kR_3^{(4)}) - \frac{1-\xi}{kR_3^{(4)}} N_1(kR_3^{(4)}) \right]; \\ m_6^{(6)} &= -\eta \left[ J_0(\gamma R_3^{(4)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_3^{(4)}} J_1(\gamma R_3^{(4)}) \right]; \\ m_6^{(7)} &= -\eta \left[ N_0(\gamma R_3^{(4)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_3^{(4)}} N_1(\gamma R_3^{(4)}) \right]; \\ m_7^{(6)} &= J_1(\gamma R_5^{(4)}); m_7^{(7)} = N_1(\gamma R_5^{(4)}); \\ m_7^{(8)} &= -J_1(kR_5^{(4)}); m_7^{(9)} = -N_1(kR_5^{(4)}); \\ m_8^{(6)} &= \eta \left[ J_0(\gamma R_5^{(4)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_5^{(4)}} J_1(\gamma R_5^{(4)}) \right]; \\ m_8^{(7)} &= \eta \left[ N_0(\gamma R_5^{(4)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_5^{(4)}} N_1(\gamma R_5^{(4)}) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_8^{(8)} &= -\left[ J_0(kR_5^{(4)}) - \frac{1-\xi}{kR_5^{(4)}} J_1(kR_5^{(4)}) \right]; \\ m_8^{(9)} &= -\left[ N_0(kR_5^{(4)}) - \frac{1-\xi}{kR_5^{(4)}} N_1(kR_5^{(4)}) \right]; \\ m_9^{(8)} &= J_1(kR_5^{(6)}); m_9^{(9)} = N_1(kR_5^{(6)}); \\ m_9^{(10)} &= -J_1(\gamma R_5^{(6)}); m_9^{(11)} = -N_1(\gamma R_5^{(6)}); \\ m_{10}^{(8)} &= \left[ J_0(kR_5^{(6)}) - \frac{1-\xi}{kR_5^{(6)}} J_1(kR_5^{(6)}) \right]; \\ m_{10}^{(9)} &= \left[ N_0(kR_5^{(6)}) - \frac{1-\xi}{kR_5^{(6)}} N_1(kR_5^{(6)}) \right]; \\ m_{10}^{(10)} &= -\eta \left[ J_0(\gamma R_5^{(6)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_5^{(6)}} J_1(\gamma R_5^{(6)}) \right]; \\ m_{10}^{(11)} &= -\eta \left[ N_0(\gamma R_5^{(6)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_5^{(6)}} N_1(\gamma R_5^{(6)}) \right]; \\ m_{11}^{(10)} &= J_1(\gamma R_7^{(6)}); m_{11}^{(11)} = N_1(\gamma R_7^{(6)}); \\ m_{11}^{(12)} &= -J_1(kR_7^{(6)}); m_{11}^{(13)} = -N_1(kR_7^{(6)}); \\ m_{12}^{(10)} &= \eta \left[ J_0(\gamma R_7^{(6)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_7^{(6)}} J_1(\gamma R_7^{(6)}) \right]; \\ m_{12}^{(11)} &= \eta \left[ N_0(\gamma R_7^{(6)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_7^{(6)}} N_1(\gamma R_7^{(6)}) \right]; \\ m_{12}^{(12)} &= -\left[ J_0(kR_7^{(6)}) - \frac{1-\xi}{kR_7^{(6)}} J_1(kR_7^{(6)}) \right]; \\ m_{12}^{(13)} &= -\left[ N_0(kR_7^{(6)}) - \frac{1-\xi}{kR_7^{(6)}} N_1(kR_7^{(6)}) \right]; \\ m_{13}^{(12)} &= J_1(kR_7^{(8)}); m_{13}^{(13)} = N_1(kR_7^{(8)}); \\ m_{13}^{(14)} &= -J_1(\gamma R_7^{(8)}); m_{13}^{(15)} = -N_1(\gamma R_7^{(8)}); \\ m_{14}^{(12)} &= \left[ J_0(kR_7^{(8)}) - \frac{1-\xi}{kR_7^{(8)}} J_1(kR_7^{(8)}) \right]; \\ m_{14}^{(13)} &= \left[ N_0(kR_7^{(8)}) - \frac{1-\xi}{kR_7^{(8)}} N_1(kR_7^{(8)}) \right]; \\ m_{14}^{(14)} &= -\eta \left[ J_0(\gamma R_7^{(8)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_7^{(8)}} J_1(\gamma R_7^{(8)}) \right]; \\ m_{14}^{(15)} &= -\eta \left[ N_0(\gamma R_7^{(8)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_7^{(8)}} N_1(\gamma R_7^{(8)}) \right]; \\ m_{15}^{(14)} &= \left[ J_0(\gamma R) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R} J_1(\gamma R) \right]; \\ m_{15}^{(15)} &= \left[ N_0(\gamma R) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R} N_1(\gamma R) \right]. \end{aligned}$$

Правые части  $P_j$  системы уравнений (18) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} P_1 = P_3 = P_5 = P_7 = P_9 = P_{11} = P_{13} = P_{15} &= 0; \\ P_2 = -e_{31}^* U_1 / (c_{11} k \alpha); P_4 = e_{31}^* U_3 / (c_{11} k \alpha); \\ P_6 = -e_{31}^* U_3 / (c_{11} k \alpha); P_8 = e_{31}^* U_5 / (c_{11} k \alpha); \\ P_{10} = -e_{31}^* U_5 / (c_{11} k \alpha); P_{12} = e_{31}^* U_7 / (c_{11} k \alpha); \\ P_{14} = -e_{31}^* U_7 / (c_{11} k \alpha). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{e_{31}^*}{c_{11} k \alpha D_0} [U_1 M_1^{(2)} + U_3 N_1^{(4,6)} + U_5 N_1^{(8,10)} + U_7 N_1^{(12,14)}], \\ A_{4n} &= \frac{e_{31}^*}{c_{11} k \alpha D_0} [-U_1 M_{4n}^{(2)} + U_3 N_{4n}^{(4,6)} + U_5 N_{4n}^{(8,10)} + U_7 N_{4n}^{(12,14)}], \\ A_{4n+1} &= \frac{e_{31}^*}{c_{11} k \alpha D_0} [U_1 M_{4n+1}^{(2)} + U_3 N_{4n+1}^{(4,6)} + U_5 N_{4n+1}^{(8,10)} + U_7 N_{4n+1}^{(12,14)}], \end{aligned} \quad (19)$$

где  $M_j^{(k)}$  - алгебраическое дополнение, которое получается из матрицы  $M_0$  путем вычеркивания  $j$ -ой строки и  $k$ -го столбца;

$$\begin{aligned} N_1^{(4,6)} &= -M_1^{(4)} + M_1^{(6)}; & N_1^{(8,10)} &= -M_1^{(8)} + M_1^{(10)}; \\ N_1^{(12,14)} &= -M_1^{(12)} + M_1^{(14)}; & N_{4n}^{(4,6)} &= M_{4n}^{(4)} - M_{4n}^{(6)}; \\ N_{4n}^{(4,6)} &= M_{4n}^{(4)} - M_{4n}^{(6)}; & N_{4n}^{(8,10)} &= M_{4n}^{(8)} - M_{4n}^{(10)}; \\ N_{4n}^{(12,14)} &= M_{4n}^{(12)} - M_{4n}^{(14)}; & N_{4n+1}^{(4,6)} &= -M_{4n+1}^{(4)} + M_{4n+1}^{(6)}; \\ N_{4n+1}^{(8,10)} &= -M_{4n+1}^{(8)} + M_{4n+1}^{(10)}; \\ N_{4n+1}^{(12,14)} &= -M_{4n+1}^{(12)} + M_{4n+1}^{(14)}. \end{aligned}$$

Из записи соотношений (19) отчетливо видно, что все коэффициенты  $A_1$ ,  $A_{4n}$  и  $A_{4n+1}$  зависят от всех электрических потенциалов  $U_{2n+1}$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ). Из этого факта

$$U_{2n+1} = U_1 F_1^{(2n+1)}(k, R) + U_3 F_3^{(2n+1)}(k, R) + U_5 F_5^{(2n+1)}(k, R) + U_7 F_7^{(2n+1)}(k, R), \quad (20)$$

где

$$F_1^{(2n+1)}(k, R) = F_0^{(2n+1)} \left[ -J_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) M_{4n}^{(2)} + N_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) M_{4n+1}^{(2)} \right];$$

$$F_0^{(2n+1)} = \frac{2K_{31}^2 f_{2n+1}(\omega)}{\left\{ 1 - \left[ R_{2n+1}^{(2n)} / R_{2n+1}^{(2n+2)} \right]^2 \right\} k R_{2n+1}^{(2n+2)} D_0};$$

$$K_{31}^2 = \frac{(e_{31}^*)^2}{\chi_{33}^* c_{11}} - \text{квадрат коэффициента электромеханической связи для режима радиальных колебаний в тонком пьезокерамическом диске};$$

$$\begin{aligned} J_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) &= J_1(k R_{2n+1}^{(2n+2)}) - R_{2n+1}^{(2n)} J_1(k R_{2n+1}^{(2n)}) / R_{2n+1}^{(2n+2)}; \\ N_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) &= N_1(k R_{2n+1}^{(2n+2)}) - R_{2n+1}^{(2n)} N_1(k R_{2n+1}^{(2n)}) / R_{2n+1}^{(2n+2)}; \\ F_3^{(2n+1)}(k, R) &= F_0^{(2n+1)} \left[ J_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) N_{4n}^{(4,6)} + N_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) N_{4n+1}^{(4,6)} \right]; \\ F_5^{(2n+1)}(k, R) &= F_0^{(2n+1)} \left[ J_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) N_{4n}^{(8,10)} + N_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) N_{4n+1}^{(8,10)} \right]; \\ F_7^{(2n+1)}(k, R) &= F_0^{(2n+1)} \left[ J_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) N_{4n}^{(12,14)} + N_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) N_{4n+1}^{(12,14)} \right]. \end{aligned}$$

Решения системы уравнений (18) для коэффициентов  $A_1$ ,  $A_{4n}$  и  $A_{4n+1}$  ( $n = 1, 2, 3$ ), которые определяют радиальные смещения материальных частиц пьезокерамического диска в областях номера  $2n + 1$  записываются в следующем виде:

следует, что все потенциалы  $U_{2n+1}$  связаны между собой линейной зависимостью. Это вполне ожидаемо и закономерно, поскольку потенциалы  $U_{2n+1}$  определяются радиальными колебаниями различных областей, которые в совокупности своей составляют единое целое – пьезокерамический диск. Для того, чтобы записать линейные зависимости между потенциалами  $U_{2n+1}$  в явном виде, обратимся к ранее полученным соотношениям (7).

Подставляя в соотношения (7) решения (12), в которых коэффициенты  $A_1$ ,  $A_{4n}$  и  $A_{4n+1}$  определены выражениями (19), получаем следующие линейные уравнения:

Систему из трех соотношений (20) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_3 [F_3^{(3)}(k, R) - 1] + U_5 F_5^{(3)}(k, R) + U_7 F_7^{(3)}(k, R) &= -U_1 F_1^{(3)}(k, R), \\ U_3 F_3^{(5)}(k, R) + U_5 [F_5^{(5)}(k, R) - 1] + U_7 F_7^{(5)}(k, R) &= -U_1 F_1^{(5)}(k, R), \\ U_3 F_3^{(7)}(k, R) + U_5 F_5^{(7)}(k, R) + U_7 [F_7^{(7)}(k, R) - 1] &= -U_1 F_1^{(7)}(k, R). \end{aligned} \quad (21)$$

Совершенно ясно, что система уравнений (21) позволяет единственным образом определить потенциалы  $U_3$ ,  $U_5$  и  $U_7$  через потенциал  $U_1$ . Решение системы уравнений (21) можно записать в следующем виде:

$$U_{2n+1} = -U_1 \Psi_{2n+1}(k, R), \quad n = 1, 2, 3, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Xi_0(k, R) &= \det \begin{vmatrix} F_3^{(3)}(k, R) - 1 & F_5^{(3)}(k, R) & F_7^{(3)}(k, R) \\ F_3^{(5)}(k, R) & F_5^{(5)}(k, R) - 1 & F_7^{(5)}(k, R) \\ F_3^{(7)}(k, R) & F_5^{(7)}(k, R) & F_7^{(7)}(k, R) - 1 \end{vmatrix}; \\ \Xi_3(k, R) &= \det \begin{vmatrix} F_1^{(3)}(k, R) & F_5^{(3)}(k, R) & F_7^{(3)}(k, R) \\ F_1^{(5)}(k, R) & F_5^{(5)}(k, R) - 1 & F_7^{(5)}(k, R) \\ F_1^{(7)}(k, R) & F_5^{(7)}(k, R) & F_7^{(7)}(k, R) - 1 \end{vmatrix}; \\ \Xi_5(k, R) &= \det \begin{vmatrix} F_3^{(3)}(k, R) - 1 & F_1^{(3)}(k, R) & F_7^{(3)}(k, R) \\ F_3^{(5)}(k, R) & F_1^{(5)}(k, R) & F_7^{(5)}(k, R) \\ F_3^{(7)}(k, R) & F_1^{(7)}(k, R) & F_7^{(7)}(k, R) - 1 \end{vmatrix}; \\ \Xi_7(k, R) &= \det \begin{vmatrix} F_3^{(3)}(k, R) - 1 & F_5^{(3)}(k, R) & F_1^{(3)}(k, R) \\ F_3^{(5)}(k, R) & F_5^{(5)}(k, R) - 1 & F_1^{(5)}(k, R) \\ F_3^{(7)}(k, R) & F_5^{(7)}(k, R) & F_1^{(7)}(k, R) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы определить потенциал  $U_1$ , необходимо рассчитать электрический импеданс  $Z_{\text{эл}}^{(1)}$  области №1, т. е. круговой области пьезокерамического диска под электродом первичной электрической цепи.

где безразмерная частотно зависящая функция  $\Psi_{2n+1}(k, R) = \Xi_{2n+1}(k, R) / \Xi_0(k, R)$ ; функции  $\Xi_0(k, R)$  и  $\Xi_{2n+1}(k, R)$  определяются следующим образом:

Очевидно, что  $Z_{\text{эл}}^{(1)} = U_1 / I_1$ , где  $I_1$  - амплитуда электрического тока в первичной электрической цепи. Ранее [5] было показано, что  $I_1 = -i\omega Q_1(\omega)$ , где  $Q_1(\omega)$  - амплитудное значение электрического заряда на электроде первичной электрической цепи. Так как

$$Q_1(\omega) = 2\pi \int_0^{R_1^{(2)}} \rho D_z^{(1)}(\rho) d\rho = 2\pi \int_0^{R_1^{(2)}} \rho \left\{ \frac{e_{31}^*}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_\rho^{(1)}(\rho)] - \chi_{33}^* \frac{U_1}{\alpha} \right\} d\rho,$$

то, принимая во внимание, что  $u_\rho^{(1)}(\rho) = A_1 J_1(k\rho)$ , можно записать

$$Q_1(\omega) = C_1^* \left[ \frac{2e_{31}^* \alpha}{\chi_{33}^* R_1^{(2)}} A_1 J_1(kR_1^{(2)}) - U_1 \right] = C_1^* U_1 [\Psi_1(k, R) - 1], \quad (23)$$

где  $C_1^* = \pi (R_1^{(2)})^2 \chi_{33}^* / \alpha$  - динамическая электрическая емкость области под круговым электродом первичной электрической цепи;

$\Psi_1(k, R)$  - безразмерная функция, числовые значения которой рассчитываются по формуле

$$\Psi_1(k, R) = \frac{2K_{31}^2 J_1(kR_1^{(2)})}{kR_1^{(2)} D_0} [M_1^{(2)} - \Psi_3(k, R) N_1^{(4,6)} - \Psi_5(k, R) N_1^{(8,10)} - \Psi_7(k, R) N_1^{(12,14)}].$$

Подставляя выражение (23) в определение амплитудного значения тока  $I_1$ , а полу-

ченный результат - в формулу для расчета электрического импеданса  $Z_{\text{эл}}^{(1)}$ , получаем



$$Z_{эл}^{(1)} = \frac{1}{-i\omega C_1^* [\Psi_1(k, R) - 1]} \quad (24)$$

Подставляя выражение (24) в определение (9) потенциала  $U_1$ , получаем следующую расчетную формулу

$$U_1 = \frac{U_0}{1 - i\omega C_1^* Z_1 [\Psi_1(k, R) - 1]}$$

$$K_{2n+1}(\omega) = - \frac{\Psi_{2n+1}(k, R)}{1 - i\omega C_1^* Z_1 [\Psi_1(k, R) - 1]}, \quad n = 1, 2, 3. \quad (25)$$

Выражение (25) отличается от всех известных, полученных другими авторами результатов, тем, что оно построено с учетом акустической обратной связи, которая существует между областью под электродом первичной электрической цепи и всеми без исключения областями, расположенными под электродами вторичных электрических цепей.

### 3. Математическое моделирование многосекционного дискового пьезоэлектрического трансформатора при групповом включении секций

В некоторых случаях оказывается целесообразным групповое включение секций многосекционного дискового пьезоэлектрического трансформатора.

Рассмотрим возникающие в этих ситуациях особенности расчета коэффициентов трансформации.

На рис. 2, а показана расчетная схема четырехсекционного пьезоэлектрического трансформатора, у которого в первичную электрическую цепь включены два электрода. Подобное включение позволяет, в принципе, увеличить мощность сигналов во вторичных электрических цепях. Два других кольцевых электрода включены в две различные вторичные электрические цепи.

Расчет коэффициентов трансформации  $K_{2n+1}(\omega)$  ( $n = 1; 3$ ) трансформатора, показанного на рис. 2, а, выполняется по схеме, которая описана в разделе 2.

Прежде всего, вводим потенциал  $U_1$  (рис. 2, а), который, очевидно, определяется следующим образом

$$U_1 = \frac{U_0 Z_{эл}^{(1,5)}}{Z_1 + Z_{эл}^{(1,5)}}, \quad (26)$$

где  $Z_{эл}^{(1,5)}$  – электрический импеданс, образованный параллельным включением электрических импедансов  $Z_{эл}^{(1)}$  и  $Z_{эл}^{(5)}$  областей №1 и

Подставляя последнее выражение в формулу (22), получаем

$$U_{2n+1}(\omega) = - \frac{U_0 \Psi_{2n+1}(k, R)}{1 - i\omega C_1^* Z_1 [\Psi_1(k, R) - 1]}, \quad n = 1, 2, 3.$$

Из последних равенств следуют определения компонентов  $K_{2n+1}(\omega)$  математической модели многосекционного пьезокерамического трансформатора:

№5 дискового трансформатора. Очевидно, что  $Z_{эл}^{(1,5)} = Z_{эл}^{(1)} Z_{эл}^{(5)} / (Z_{эл}^{(1)} + Z_{эл}^{(5)})$ .

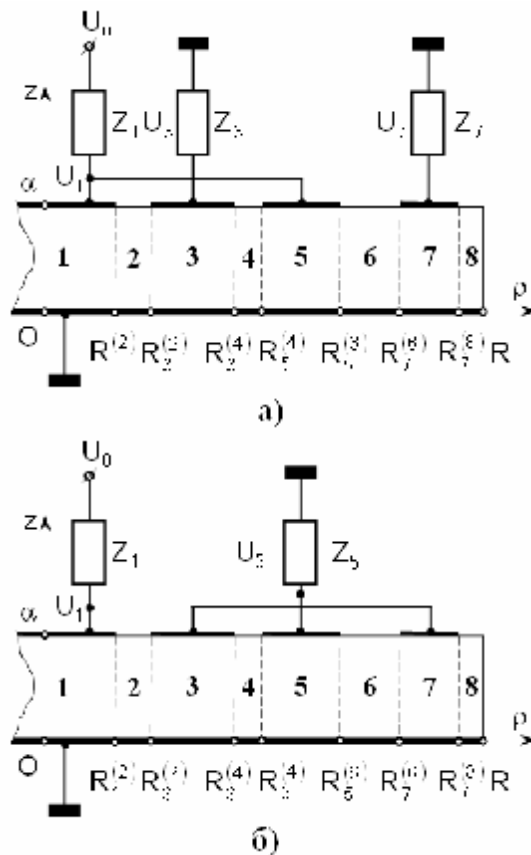


Рис. 2. Расчетные схемы многосекционных пьезоэлектрических трансформаторов с групповыми включениями секций

Затем определяются коэффициенты  $A_1$ ,  $A_{4n}$  и  $A_{4n+1}$  ( $n = 1, 2, 3$ ), которые формируют общие решения (12), т. е. радиальные смещения  $u_p^{(2n+1)}(\rho)$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) материальных частей в областях диска под электродами. Коэффициенты  $A_1$ ,  $A_{4n}$  и  $A_{4n+1}$  ( $n = 1, 2, 3$ ) задаются следующими выражениями

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{e_{31}^*}{c_{11}k\alpha D_0} \left[ U_1 \left( M_1^{(2)} + N_1^{(8,10)} \right) + U_3 N_1^{(4,6)} + U_7 N_1^{(12,14)} \right], \\
 A_{4n} &= \frac{e_{31}^*}{c_{11}k\alpha D_0} \left[ U_1 \left( -M_{4n}^{(2)} + N_{4n}^{(8,10)} \right) + U_3 N_{4n}^{(4,6)} + U_7 N_{4n}^{(12,14)} \right], \\
 A_{4n+1} &= \frac{e_{31}^*}{c_{11}k\alpha D_0} \left[ U_1 \left( M_{4n+1}^{(2)} + N_{4n+1}^{(8,10)} \right) + U_3 N_{4n+1}^{(4,6)} + U_7 N_{4n+1}^{(12,14)} \right], \tag{27}
 \end{aligned}$$

где величины  $D_0$ ,  $M_k^{(2)}$ ,  $N_k^{(4,6)}$ ,  $N_k^{(8,10)}$  и  $N_k^{(12,14)}$  ( $k = 1; 4n; 4n + 1; n = 1, 2, 3$ ) определены в комментариях к выражениям.

Подстановка коэффициентов  $A_1$ ,  $A_{4n}$  и

$$U_{2n+1} = U_1 F_1^{(2n+1)}(k, R) + U_3 F_3^{(2n+1)}(k, R) + U_7 F_7^{(2n+1)}(k, R), \tag{28}$$

где

$$F_1^{(2n+1)}(k, R) = F_0^{(2n+1)} \left[ -J_1 \left( k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)} \right) \left( M_{4n}^{(2)} + N_{4n}^{(8,10)} \right) + N_1 \left( k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)} \right) \left( M_{4n+1}^{(2)} + N_{4n+1}^{(8,10)} \right) \right];$$

функции  $F_3^{(2n+1)}(k, R)$  и  $F_7^{(2n+1)}(k, R)$  описаны в комментариях к формуле (20).

Из общего определения (28) следует, что

$$U_3 \left[ F_3^{(3)}(k, R) - 1 \right] + U_7 F_7^{(3)}(k, R) = -U_1 F_1^{(3)}(k, R), \quad \text{где}$$

$$\Psi_3(k, R) = \frac{1}{D_2} \left\{ F_1^{(3)}(k, R) \left[ F_7^{(7)}(k, R) - 1 \right] - F_1^{(7)}(k, R) F_7^{(3)}(k, R) \right\};$$

$$\Psi_7(k, R) = \frac{1}{D_2} \left\{ F_1^{(7)}(k, R) \left[ F_3^{(3)}(k, R) - 1 \right] - F_3^{(7)}(k, R) F_1^{(3)}(k, R) \right\};$$

$$D_2 = \left[ F_3^{(3)}(k, R) - 1 \right] \left[ F_7^{(7)}(k, R) - 1 \right] - F_7^{(3)}(k, R) F_3^{(7)}(k, R).$$

Электрические импедансы  $Z_{\text{эл}}^{(1)}$  и  $Z_{\text{эл}}^{(5)}$  определяются стандартным образом:  $Z_{\text{эл}}^{(k)} = U_1 / I_k$  ( $k = 1, 5$ ), где амплитудные значения токов  $I_k = -i\omega Q_k$ . При этом электрические

$$U_3 F_3^{(7)}(k, R) + U_7 \left[ F_7^{(7)}(k, R) - 1 \right] = -U_1 F_1^{(7)}(k, R). \tag{29}$$

Решение системы уравнений (29) можно представить в следующем виде:

$$U_3 = -U_1 \Psi_3(k, R), \quad U_7 = -U_1 \Psi_7(k, R), \tag{30}$$

заряды  $Q_1$  и  $Q_5$  на электродах первичной электрической цепи задаются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= 2\pi \int_0^{R_1^{(2)}} \rho D_z^{(1)}(\rho) d\rho = 2\pi \int_0^{R_1^{(2)}} \rho \left\{ \frac{e_{31}^*}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho u_\rho^{(1)}(\rho) \right] - \chi_{33}^* \frac{U_1}{\alpha} \right\} d\rho = \\
 &= C_1^* U_1 \left[ \Psi_1(k, R) - 1 \right];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_5 &= 2\pi \int_{R_5^{(4)}}^{R_5^{(6)}} \rho D_z^{(5)}(\rho) d\rho = 2\pi e_{31}^* \left[ R_5^{(6)} u_\rho^{(5)}(R_5^{(6)}) - R_5^{(4)} u_\rho^{(5)}(R_5^{(4)}) \right] - \\
 &- \pi \left[ \left( R_5^{(6)} \right)^2 - \left( R_5^{(4)} \right)^2 \right] \chi_{33}^* \frac{U_1}{\alpha} = C_5^* U_1 \left[ \Psi_5(k, R) - 1 \right], \tag{31}
 \end{aligned}$$

где  $C_1^* = \pi \left( R_1^{(2)} \right)^2 \chi_{33}^* / \alpha$  и  $C_5^* = \pi \left[ \left( R_5^{(6)} \right)^2 - \left( R_5^{(4)} \right)^2 \right] \chi_{33}^* / \alpha$  — электрические емкости областей диска под электродами №1 и №5; частотно зависимые безразмерные функции  $\Psi_1(k, R)$  и  $\Psi_5(k, R)$  рассчитываются по формулам:

$$\Psi_1(k, R) = \frac{2K_{31}^2}{kR_1^{(2)}D_0} J_1 \left( kR_1^{(2)} \right) \left[ M_1^{(2)} + N_1^{(8,10)} - \Psi_3(k, R) N_1^{(4,6)} - \Psi_7(k, R) N_1^{(12,14)} \right];$$

$$\Psi_5(k, R) = \frac{2K_{31}^2}{kR_5^{(6)}D_0 \left[ 1 - (R_5^{(4)}/R_5^{(6)})^2 \right]} \left\{ J_1(k, R_5^{(4)}, R_5^{(6)}) \left[ -M_8^{(2)} + N_8^{(8,10)} - \Psi_3(k, R)N_8^{(4,6)} - \Psi_7(k, R)N_8^{(12,14)} \right] + N_1(k, R_5^{(4)}, R_5^{(6)}) \times \left[ M_9^{(2)} + N_9^{(8,10)} - \Psi_3(k, R)N_9^{(4,6)} - \Psi_7(k, R)N_9^{(12,14)} \right] \right\};$$

$D_0$  - определитель системы уравнений (18);  
остальные величины определены в комментариях к выражениям (19) и (20).

Так как

$$Z_{3n}^{(1)} = \frac{1}{-i\omega C_1^* [\Psi_1(k, R) - 1]},$$

то

$$Z_{3n}^{(5)} = \frac{1}{-i\omega C_5^* [\Psi_5(k, R) - 1]},$$

$$Z_{3n}^{(1,5)} = \frac{1}{-i\omega C_1^* \left\{ \Psi_1(k, R) - 1 + \left( \frac{C_5^*}{C_1^*} \right) [\Psi_5(k, R) - 1] \right\}},$$

и потенциал

$$U_1 = \frac{U_0}{1 - i\omega C_1^* Z_1 \left\{ \Psi_1(k, R) - 1 + \left( \frac{C_5^*}{C_1^*} \right) [\Psi_5(k, R) - 1] \right\}}. \quad (32)$$

Подстановка выражения (32) в соотношения (30), позволяет записать их в следующем виде

$$U_{2n+1} = - \frac{U_0 \Psi_{2n+1}(k, R)}{1 - i\omega C_1^* Z_1 \left\{ \Psi_1(k, R) - 1 + \left( \frac{C_5^*}{C_1^*} \right) [\Psi_5(k, R) - 1] \right\}}, \quad (n = 1; 3).$$

Из последней записи следует, что

$$K_{2n+1}(\omega) = - \frac{\Psi_{2n+1}(k, R)}{1 - i\omega C_1^* Z_1 \left\{ \Psi_1(k, R) - 1 + \left( \frac{C_5^*}{C_1^*} \right) [\Psi_5(k, R) - 1] \right\}}, \quad (n = 1; 3).$$

Математическая модель конструкции, расчетная схема которой показана на рис. 2, б, определяется, очевидно, следующим образом

$$K_5(\omega) = U_5/U_0, \quad (33)$$

где  $U_5 = Z_5 I$  - потенциал на электрической нагрузке во вторичной электрической цепи, в которую включены три кольцевых электрода. При этом амплитуда тока  $I$  во вторичной электрической цепи определяется следующим

$$u_p^{(2n+1)}(\rho) = A_{4n} J_1(k\rho) + A_{4n+1} N_1(k\rho), \quad (n = 1, 2, 3), \quad (35)$$

где коэффициенты  $A_{4n}$  и  $A_{4n+1}$  задаются выражениями:

$$A_{4n} = \frac{e_{31}^*}{c_{11} k \alpha D_0} \left\{ -U_1 M_{4n}^{(2)} + U_5 \left[ N_{4n}^{(4,6)} + N_{4n}^{(8,10)} + N_{4n}^{(12,14)} \right] \right\},$$

$$A_{4n+1} = \frac{e_{31}^*}{c_{11} k \alpha D_0} \left\{ U_1 M_{4n+1}^{(2)} + U_5 \left[ N_{4n+1}^{(4,6)} + N_{4n+1}^{(8,10)} + N_{4n+1}^{(12,14)} \right] \right\}. \quad (36)$$

Следуя формуле (6), можно записать, что

$$Q_{2n+1} = \frac{2\alpha e_{31}^* C_{2n+1}^*}{\chi_{33}^* \left[ (R_{2n+1}^{(2n+2)})^2 - (R_{2n+1}^{(2n)})^2 \right]} \left[ R_{2n+1}^{(2n+2)} u_p^{(2n+1)}(R_{2n+1}^{(2n+2)}) - R_{2n+1}^{(2n)} u_p^{(2n+1)}(R_{2n+1}^{(2n)}) \right] - C_{2n+1}^* U_5, \quad n = 1, 2, 3, \quad (37)$$

где  $C_{2n+1}^* = (\pi \chi_{33}^* / \alpha) \left[ (R_{2n+1}^{(2n+2)})^2 - (R_{2n+1}^{(2n)})^2 \right]$  - электрическая емкость  $(2n + 1)$ -ой кольцевой области диска.

$$I = -i\omega(Q_3 + Q_5 + Q_7), \quad (34)$$

где  $Q_{2n+1}$  ( $n = 1, 2, 3$ ) - электрические заряды на кольцевых электродах, величины которых определяются радиальными смещениями  $u_p^{(2n+1)}(\rho)$  материальных частиц пьезоэлектрика.

Радиальные смещения  $u_p^{(2n+1)}(\rho)$ , в свою очередь, определяются следующим образом

После подстановки в соотношение (37) коэффициентов  $A_{4n}$  и  $A_{4n+1}$ , заданных выражениями (36), можно записать, что

$$Q_{2n+1} = C_{2n+1}^* [\beta_{2n+1} U_1 + (\lambda_{2n+1} - 1) U_5], \quad n = 1, 2, 3, \quad (38)$$

где

$$\beta_{2n+1} = \frac{2K_{31}^2}{kR_{2n+1}^{(2n+2)} \left[ 1 - \left( R_{2n+1}^{(2n)} / R_{2n+1}^{(2n+2)} \right)^2 \right] D_0} \left[ -M_{4n}^{(2)} J_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) + \right. \\ \left. + M_{4n+1}^{(2)} N_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) \right]; \lambda_{2n+1} = \frac{2K_{31}^2}{kR_{2n+1}^{(2n+2)} \left[ 1 - \left( R_{2n+1}^{(2n)} / R_{2n+1}^{(2n+2)} \right)^2 \right] D_0} \left[ S_{4n} J_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) + \right. \\ \left. + S_{4n+1} N_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) \right]; \\ S_{4n} = N_{4n}^{(4,6)} + N_{4n}^{(8,10)} + N_{4n}^{(12,14)}; S_{4n+1} = N_{4n+1}^{(4,6)} + N_{4n+1}^{(8,10)} + N_{4n+1}^{(12,14)}.$$

Подставляя амплитудные значения электрических зарядов  $Q_{2n+1}$ , заданные соотношениями (38), в определение (34) электрического тока во вторичной электрической цепи, можно записать, что

$$U_5 = Z_5 I = -i\omega Z_5 C_5^* q(\omega) U_1 - i\omega Z_5 C_5^* p(\omega) U_5,$$

$$\text{где } q(\omega) = \frac{C_3^*}{C_5^*} \beta_3 + \beta_5 + \frac{C_7^*}{C_5^*} \beta_7;$$

$$p(\omega) = \frac{C_3^*}{C_5^*} (\lambda_3 - 1) + \lambda_5 - 1 + \frac{C_7^*}{C_5^*} (\lambda_7 - 1).$$

Из последнего уравнения можно записать, что

$$U_5 = -\Psi_5(k, R) U_1, \quad (39)$$

где

$$\Psi_5(k, R) = \frac{i\omega Z_5 C_5^* q(\omega)}{1 + i\omega Z_5 C_5^* p(\omega)}.$$

Для завершения вычислений, как всегда, необходимо определить потенциал  $U_1$  в явном виде.

$$A_1 = \frac{e_{31}^*}{c_{11} k \alpha D_0} \left\{ U_1 M_1^{(2)} + U_5 \left[ N_1^{(4,6)} + N_1^{(8,10)} + N_1^{(12,14)} \right] \right\} = \\ = \frac{e_{31}^* U_1}{c_{11} k \alpha D_0} \left\{ M_1^{(2)} - \Psi_5(k, R) \left[ N_1^{(4,6)} + N_1^{(8,10)} + N_1^{(12,14)} \right] \right\}.$$

Подставляя определение константы  $A_1$  в формулу для расчета тока  $I_1$ , получаем

$$\Psi_1(k, R) = \frac{2K_{31}^2}{kR_1^{(2)} D_0} \left\{ M_1^{(2)} - \Psi_5(k, R) \left[ N_1^{(4,6)} + N_1^{(8,10)} + N_1^{(12,14)} \right] \right\}.$$

Из определения (41) следует, что

$$Z_{3n}^{(1)} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{1}{-i\omega C_1^* U_1 [\Psi_1(k, R) - 1]},$$

а потенциал на электроде первичной электрической цепи

$$U_1 = \frac{U_0}{1 - i\omega C_1^* U_1 [\Psi_1(k, R) - 1]}. \quad (42)$$

С учетом выражения (42), соотношение (39) можно записать в следующем виде

Очевидно, что

$$U_1 = \frac{U_0 Z_{3n}^{(1)}}{Z_1 + Z_{3n}^{(1)}}, \quad (40)$$

где  $Z_{3n}^{(1)} = U_1 / I_1$  - электрический импеданс круговой области №1. Амплитуда электрического тока  $I_1$  в первичной электрической цепи определяется стандартным способом:

$$I_1 = -i\omega Q_1 = -i\omega 2\pi \int_0^{R_1^{(2)}} \rho D_z^{(1)}(\rho) d\rho = \\ = -i\omega C_1^* \left\{ \frac{2e_{31}^* \alpha}{\chi_{33}^* R_1^{(2)}} A_1 J_1(k R_1^{(2)}) - U_1 \right\},$$

где  $C_1^* = \pi (R_1^{(2)})^2 \chi_{33}^* / \alpha$  - электрическая емкость кругового электрода первичной электрической цепи. Константа  $A_1$  рассчитывается по формуле

$$I_1 = -i\omega C_1^* U_1 [\Psi_1(k, R) - 1], \quad (41)$$

где

$$U_5 = -\frac{U_0 \Psi_5(k, R)}{1 - i\omega C_1^* U_1 [\Psi_1(k, R) - 1]}.$$

Из последней записи следует определение математической модели трансформатора, расчетная схема которого показана на рис. 2, б:

$$K_5(\omega) = -\frac{\Psi_5(k, R)}{1 - i\omega C_1^* U_1 [\Psi_1(k, R) - 1]}.$$

Рассмотренных в настоящем разделе

двух примеров вполне достаточно для того, чтобы понять особенности математического моделирования многосекционных пьезоэлектрических трансформаторов, которые возникают при групповом включении секций.

### Выводы

Основные положения настоящей статьи можно зафиксировать следующим образом.

1. Впервые предлагается не содержащая внутренних противоречий схема построения математической модели четырех секционного дискового пьезоэлектрического трансформатора.

2. Предложенная схема сохраняет свою логическую конструкцию в широком диапазоне значений числа секций. Если обозначить число секций символом  $M$ , то можно утверждать, что предложенная схема работоспособна на бесконечном интервале  $M \geq 2$ .

3. Рассмотрены особенности построения математических моделей многосекционных трансформаторов, которые возникают при групповом включении секций.

4. По мнению авторов, настоящая статья завершает построение теории пьезоэлектрических трансформаторов с радиальными колебаниями в тонких, поляризованных по толщине, пьезокерамических дисках.

### Список литературы

1. Джагулов Р.Г. Пьезоэлектронные устройства вычислительной техники, систем контроля и управления / Р.Г. Джагулов, А.А. Ерофеев. – СПб. : Политехника, 1994. – 608 с.
2. Богдан А.В. Исследование характеристик пьезоэлектрического трансформатора на основе радиальных колебаний в тонких пьезокерамических дисках / А.В. Богдан, О.Н. Петрищев, Ю.И. Якименко, Ю.Ю. Яновская // Электроника и связь. Тематический выпуск «Электроника и нанотехнологии». – 2009. – Ч. 1. – С. 269–274.
3. Петрищев О.Н. Принципы и методы расчета передаточных характеристик дисковых пьезоэлектрических трансформаторов. Часть 2. Методика расчета параметров и характеристик простейшего дискового пьезоэлектрического трансформатора / О.Н. Петрищев, К.В. Базило // Вісник Черкаського державного технологічного уні-

верситету. – 2015. – № 4. – С. 10–23.

4. Сенник Н.А. Моделирование и расчет электроупругих полей пьезокерамических оболочек и пластин [Электронный ресурс] / Н. А. Сенник. – Режим доступа : <http://www.dissercat.com/content/modelirovanie-i-raschet-elektrouprugikh-polei-pezoeramicheskikh-obolochek-i-plastin>
5. Петрищев О.Н. Принципы математического моделирования трансформаторов, работающих на планарных осесимметричных колебаниях пьезокерамических дисков / О.Н. Петрищев, К.В. Базило // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2015. – № 3. – С. 10–20.

### References

1. Dzhagupov, R.G. and Erofeev, A.A. (1994). Piezoelectronic device of computing, control and monitoring systems. St. Petersburg: *Politehnika*, 608 p. [in Russian]
2. Bogdan, A.V., Petrishchev, O.N., Yakimenko, Yu.I. and Yanovskaya, Yu.Yu. (2009). Investigation of the characteristics of the piezoelectric transformer on the basis of the radial oscillations in a thin piezoceramic disks. *Elektronika i svyaz. Temat. vyp. "Elektronika i nanotekhnologiyi"*, P. 1, pp. 269–274. [in Russian]
3. Petrishchev, O.N. and Bazilo, C.V. (2015). Principles and methods of the calculation of transfer characteristics of disk piezoelectric transformers. Part 2. The procedure of calculation of parameters and characteristics of the simplest disk piezoelectric transformer. *Visnyk Cherkaskogo derzhavnogo tehnologichnogo universitetu. Seria: Tehnichni nauky*, No. 4, pp. 10–23. [in Russian]
4. Senik, N. A. Simulation and calculation of electroelastic fields of piezoceramic shells and plates, available at: <http://www.dissercat.com/content/modelirovanie-i-raschet-elektrouprugikh-polei-pezoeramicheskikh-obolochek-i-plastin>
5. Petrishchev, O. N. and Bazilo, C. V. (2015) Principles of mathematical modeling of transformers that operate on planar axisymmetric vibrations of piezoceramic disks. *Visnyk Cherkaskogo derzhavnogo tehnologichnogo universitetu. Seria: Tehnichni nauky*, No. 3, pp. 10–20 [in Russian].

**O.N. Petrishchev**, *Dr. Tech. Sc., Prof.*,  
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"  
Peremogy ave., 37, Kyiv, 03056, Ukraine  
**C.V. Bazilo**, *Ph. D. (Eng.), Assoc. Prof.*  
Cherkasy State Technological University  
Shevchenko blvd, 460, Cherkasy, 18006, Ukraine

## MATHEMATICAL MODEL OF MULTISECTIONAL PIEZOELECTRIC TRANSFORMER WITH RING ELECTRODES IN SECONDARY ELECTRICAL CIRCUITS

*Within power electronic electromagnetic transformers have been the dominating component for converting and transforming of electrical power. The trend of power converters goes in the direction of higher efficiency and smaller volume. Research has shown that piezoelectric transformers can compete with traditional electromagnetic transformers on both efficiency and power density.*

*Currently, there are no reliable and valid methods of constructing of mathematical models of piezoelectric transformers, which could be used as a theoretical basis for characteristics and parameters calculating of this class of functional elements of modern piezoelectronics. The final goal of mathematical modeling of the vibrating piezoelectric elements physical condition is a qualitative and quantitative description of characteristics and parameters of existing electrical and elastic fields.*

*The main provisions of this article can be fixed as follows. For the first time the scheme of mathematical model constructing of the four sectional disk piezoelectric transformer, which does not contain internal contradictions, is proposed. Proposed scheme maintains its logical structure in the wide range of the number of sections. The features of mathematical models constructing of multisectional transformers, which arise at group connected sections, are considered. According to the authors this article completes construction of the theory of piezoelectric transformers with radial oscillations in thin, polarized across the thickness, piezoelectric disks.*

**Key words:** *piezoelectric transformer, radial oscillations, physical processes, mathematical model.*

*Статтю представляє О. М. Петрищев, д.т.н., професор, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».*